

# Aktuelle Problemstellungen im Brückenbau zum Thema „Baudynamik“

Dipl.-Ing. Dr. Heinz Pircher

Zusammenfassung:

Mit den neuen, EUROCODE – gemäßen Normen werden auch baulynamische Berechnungen neu geregelt. Ein Berechnungsverfahren, einfacher und schneller anwendbar als die übliche Zeitschrittberechnung, wird für die Anwendungsfälle „Dynamik von Eisenbahnbrücken im Zuge von Hochgeschwindigkeitsstrecken“ und „Erdbebenberechnung von Brückenbauwerken“ gezeigt.

Summary:

The new EUROCODE based design code regulations require more attention to Structural Dynamics. An alternative analysis method, easier to use and requiring less computer time than the usual time stepping procedure, is shown and applied for Dynamic Analysis of high speed railway bridges and for Seismic analysis of a box girder bridge.

## 1 EINLEITUNG

Im Zusammenhang mit der Einführung der neuen, dem EUROCODE entsprechenden Normen für den Brückenbau sind Problemstellungen aus der Baulodynamik für die Tragwerksplanung von Brückenbauwerken zunehmend relevant geworden. Nachfolgend werden zwei besonders aktuelle Anlässe, baulodynamische Berechnungen auszuführen, zur Diskussion gestellt:

- Dynamische Untersuchungen von Eisenbahnbrücken im Zuge von Hochgeschwindigkeitsstrecken mit Fahrgeschwindigkeiten bis 300 km/h
- Beanspruchung von Brückenbauwerken durch Erdbeben

In beiden Fällen sind aufwendige und komplexe Berechnungen notwendig, um den Zeitablauf der Zugüberfahrt bzw. des Erdbebenereignisses im Detail zu simulieren. Die derzeit üblichen Berechnungsverfahren, meist implizite oder explizite Differenzenverfahren (Zeitschrittberechnungen - Newmark-Verfahren), erfordern ein hohes Maß an Sachkenntnis und einschlägiger Erfahrung beim Anwender.

Besonders im Fall der Eisenbahnbrücken kommt noch ein übermäßiger Aufwand an Rechnerkapazität hinzu. Daher entsteht bei kleineren Eisenbahnbrücken die Schwierigkeit, dass diese aufwendigen Untersuchungen schlecht im Rahmen der Honorare unterzubringen sind, die für die Planung solcher Bauwerke üblich sind.

Nachfolgend wird ein alternatives Berechnungsverfahren vorgestellt, das einfacher zu handhaben ist und die erforderliche Rechenzeit ganz wesentlich reduziert. Im Gegensatz zum Newmark – Verfahren, das auf numerischer Integration in der Zeitdimension beruht, benutzt das alternative Berechnungsverfahren analytische Zeitintegration.

Die Implementierung dieses Berechnungsverfahrens wurde für beide Anwendungsfälle als „Zusatzfunktion“ für SOFiSTiK durchgeführt, wobei die spezielle Vorbereitung der Eingabedaten und die spezielle Nachbearbeitung der Ergebnisse im Rahmen von EXCEL erfolgen kann.

## 2 DAS ALTERNATIVE BERECHNUNGSVERFAHREN

### 2.1 Modale Analyse

Auf Basis der üblichen Systemidealisierung („Mehrfreiheitsgradsystem“ als Stabwerk und/oder Finite Elemente System) wird von den bekannten Prinzipien der „Modalen Analyse“ ausgegangen, die nachfolgend kurz zusammengefasst werden. Unter zeitlich veränderlicher Last wird der zeitliche Verlauf der Verformungen von der Matrix – Differentialgleichung (1) beschrieben:

$$[M] \cdot \{\ddot{y}(t)\} + [D] \cdot \{\dot{y}(t)\} + [C] \cdot \{y(t)\} + \{F(t)\} = 0 \quad (1)$$

Es bedeuten: [M] Massematrix                     $\{F(t)\}$  Vektor der zeitabhängigen Knotenlasten  
 [D] Dämpfungsmatrix                     $\{y(t)\}$  Vektor der zeitabhängigen Verformungen  
 [C] Steifigkeitsmatrix                     $\{\dot{y}(t)\}, \{\ddot{y}(t)\}$  Geschwindigkeit und Beschleunigung in den Knotenpunkten

Nach Bestimmung der Eigenfrequenzen und der zugehörigen Eigenschwingformen wird jeder Eigenfrequenz ein „stellvertretender Einmasseschwinger“ („EMS“) zugeordnet. Die Systemverformung wird aus den einzelnen Eigenschwingformen zusammengesetzt. Die jeweilige Auslenkung des zugeordneten EMS ergibt den Multiplikator für die betreffende Eigenschwingform bei dieser Superposition. Auf diese Weise lässt sich die Matrixdifferentialgleichung (1) in eine Serie von gewöhnlichen Differentialgleichungen (2), jede mit nur mehr einem Freiheitsgrad, umformen.

$$\Sigma(m_i \cdot \ddot{q}_{i(t)} + d_i \cdot \dot{q}_{i(t)} + c_i \cdot q_{i(t)} + f_{i(t)} = 0) \quad (2)$$

Mit  $q_{i(t)}$  wird in Gleichung (2) die Auslenkung des jeweils betrachteten EMS bezeichnet. Die Auslenkung des EMS ist gleichbedeutend mit dem Faktor, mit dem die Eigenschwingform i zum jeweiligen Zeitpunkt für die Superposition zu multiplizieren ist.

Die Koeffizienten der Differentialgleichung (1) können mit Hilfe der nachfolgend angegebenen Transformationsgleichungen in die Kennwerte der einzelnen EMS umgerechnet werden.

Transformation für Masse, Dämpfung, Federkonstante und Belastung der EMS:

Masse: 
$$m_i = \{\varphi_i\}^T \cdot [M] \cdot \{\varphi\} \quad (\{\varphi\} \dots \text{Eigenschwingform}) \quad (3)$$

Dämpfung:  $d_i$  ... Modale Dämpfung. Der im EUROCODE festgelegte Dämpfungsprozentsatz  $\zeta$  kann mit  $d_i = \zeta \cdot 2m\omega$  in die Dämpfungskonstante des EMS umgerechnet werden

Steifigkeit: 
$$c_i = m_i \cdot \omega_i^2 \quad (\omega_i \dots \text{Eigenfrequenz}) \quad (4)$$

Belastung: 
$$f(t) = \{\varphi_i\}^T \cdot \{F\}_{(t)} \quad (5)$$

Die transformierte Systemgleichung (2) hat gegenüber der allgemeinen Formulierung (1) die bekannten Vorteile der modalen Analyse:

- Es muss nicht mehr eine Matrix Differentialgleichung mit vielen gekoppelten Freiheitsgraden gelöst werden. Die jetzt vorliegende Folge von entkoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen mit anschließender Überlagerung der Einzelergebnisse ist wesentlich einfacher zu lösen.
- In allen praktischen Anwendungsfällen zeigt sich, dass nur ein sehr kleiner Teil der EMS relevante Beiträge zur Überlagerung der Einzelergebnisse bringt. In der Regel können 90 bis 95% der EMS vernachlässigt werden. Daraus ergibt sich eine entscheidende Einsparung an Rechenzeit und Speicherplatzbedarf.

Allerdings ist darauf hinzuweisen, dass die Transformation (3) lineares Systemverhalten voraussetzt. Eine Anwendung der modalen Analyse für nichtlineares Systemverhalten, wie es im Falle der Erdbebenberechnung immer wieder notwendig ist, ist nur in speziellen Sonderfällen möglich. In Abschnitt 4.2 wird näher auf dieses Problem eingegangen.

## 2.2 Analytische Zeitintegration

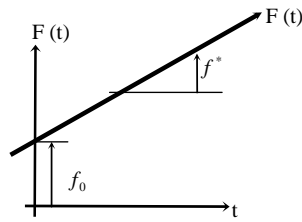
In vielen Fällen ist es möglich, die Zeitanhängigkeit der Last als geschlossene Funktion algebraisch darzustellen und für die Differentialgleichung (2) des EMS eine allgemeine Lösung zu finden. Nachfolgend werden zwei Fälle aufgezeigt, wo eine geschlossene, allgemeine Lösung möglich ist:

### 2.2.1 Linearer Zeitverlauf der Belastungsfunktion

Der EMS ist durch folgende Kennwerte definiert:

Federkonstante	$c$	Eigenfrequenz	$\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ (ungedämpft)
Masse	$m$		
Dämpfung	$\zeta$	und	$\omega^* = \omega \cdot \sqrt{1 - \zeta^2}$ (gedämpft)

Der Verlauf der Belastung ist Linear:



$$f(t) = f_0 + f^* \cdot t \quad (7)$$

Die allgemeine Lösung ergibt sich in diesem Fall zu:

$$q = \left( \frac{f^*}{c} \cdot t - \frac{d \cdot f^*}{c^2} + \frac{f_0}{c} \right) + \left( A \cdot \cos \omega^* \cdot t + B \cdot \sin \omega^* \cdot t \right) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \quad (8)$$

Die freien Parameter A und B der allgemeinen Lösung können für die Startbedingung „EMS in Ruhe“ für den Zeitpunkt  $t = 0$  bestimmt werden:

$$A = \frac{d \cdot f^*}{c^2} - \frac{f_0}{c} \quad \text{und} \quad B = \left( \frac{d \cdot f^*}{c^2} - \frac{f_0}{c} \right) \cdot \frac{\zeta \omega}{\omega^*} - \left( \frac{f^*}{c \cdot \omega^*} \right) \quad (9)$$

Diese Lösung der Differentialgleichung (2) gilt bis zum Zeitpunkt  $t_1$ , wenn der EMS nach Ende der Belastung frei ausschwingt. Diese Phase wird von der homogenen Differentialgleichung beschrieben (wie (2) – es entfällt aber das Belastungsglied). Hiefür kann die folgende Lösung angegeben werden:

$$q_{(t)} = (A_2 \cdot \cos(\omega^* \cdot t) + B_2 \cdot \sin(\omega^* \cdot t)) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \quad (10)$$

Die freien Parameter  $A_2$  und  $B_2$  werden mit Hilfe der Zustandsgrößen des EMS (Auslenkung =  $q_{(t)}$ , Geschwindigkeit = Gl. (8) nach  $t$  differenzieren!) zum Zeitpunkt  $t_1$  am Ende der Belastungsphase bestimmt.

$$A_2 = q(t_1) \quad (11)$$

$$B_2 = \frac{\dot{q}(t_1) - q(t_1) \cdot (-\zeta \cdot \omega)}{\omega^*} \quad (12)$$

Damit ist für den Fall „linearer Zeitverlauf der Belastung“ eine geschlossene algebraische Lösung für die Differentialgleichung (2) des einzelnen Einmasseschwingers angegeben.

### 2.2.2 Sinusförmiger Verlauf der Belastungsfunktion

Auch bei sinusförmigem Verlauf der Belastungsfunktion ist eine geschlossene und allgemeine algebraische Lösung der Differentialgleichung (2) möglich. Auch hier muss zwischen Phase 1, das ist der Zeitabschnitt während der Belastung, und Phase 2, das ist das freie Ausschwingen nach Ende der Belastung unterschieden werden. Nachfolgend wird diese Lösung angegeben und für den Fall, dass die Dauer der Belastungsphase mit der halben Periode der Belastungsfunktion übereinstimmt, in Abb. 1 grafisch veranschaulicht.

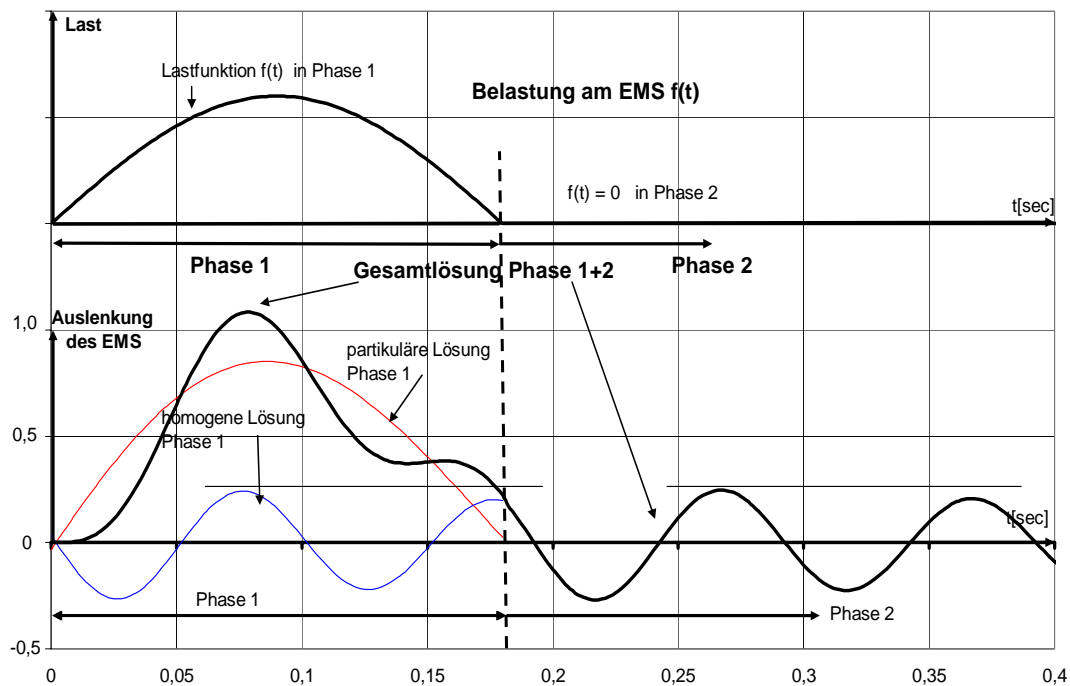


Abbildung 1: Belastungs- und Lösungsfunktion für sinusförmigen Zeitverlauf der Belastung am EMS

Die Differentialgleichung für den EMS unter sinusförmiger Belastung lautet:

$$m_i \cdot \ddot{q}_i(t) + d_i \cdot \dot{q}_i(t) + c_i \cdot q_i(t) + f_0 \cdot \sin \bar{\omega} \cdot t = 0 \quad (13)$$

Die Allgemeine Lösung kann wie folgt angegeben werden:

$$q(t) = (G_1 \cdot \cos \bar{\omega} \cdot t + G_2 \cdot \sin \bar{\omega} \cdot t) + (A \cdot \cos \omega^* \cdot t + B \cdot \sin \omega^* \cdot t) \cdot e^{-\zeta \cdot \omega \cdot t} \quad (14)$$

Mit den Abkürzungen:

$$G_1 = \frac{f_0}{c} \cdot \left[ \frac{-2\zeta\beta}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] \quad A = -G_1 \quad \beta = \frac{\bar{\omega}}{\omega}$$

$$G_2 = \frac{f_0}{c} \cdot \left[ \frac{1-\beta^2}{(1-\beta^2)^2 + (2\zeta\beta)^2} \right] \quad B = \frac{G_1 \cdot (-\zeta \cdot \omega) - \bar{\omega} \cdot G_2}{\omega^*}$$

Die Lösung für Phase 2, freies Ausschwingen nach Ende der Belastung, ist identisch mit der Lösung für lineare Belastung. Es gelten unverändert die Gleichungen (10), (11) und (12) auch für diesen Fall.

### 3 SIMULATION VON ZUGÜBERFAHRTEN

#### 3.1 Ergänzende Anmerkungen zur Theorie

Um die oben gezeigte Berechnungsmethode für die Simulation von Zugüberfahrten anzuwenden, sind noch einige ergänzende Überlegungen zur mathematischen Darstellung der zeitabhängigen Belastung notwendig.

1. Der Lastenzug (z.B. die HSLM-A Lastenzüge des EUROCODE) besteht aus einer Serie von ca. 30 bis 70 Achslasten, die mit einer vorgegebenen Geschwindigkeit die Brücke passieren. Man muss also nur die Überfahrt einer einzelnen Achslast berechnen und kann dieses Ergebnis für alle folgenden Achslasten jeweils zeitversetzt zu überlagern. Der Zeitversatz zwischen den Beiträgen der einzelnen Achslasten ergibt sich aus Achsabstand und Fahrgeschwindigkeit. Die folgenden Überlegungen gelten für eine einzelne Achslast.

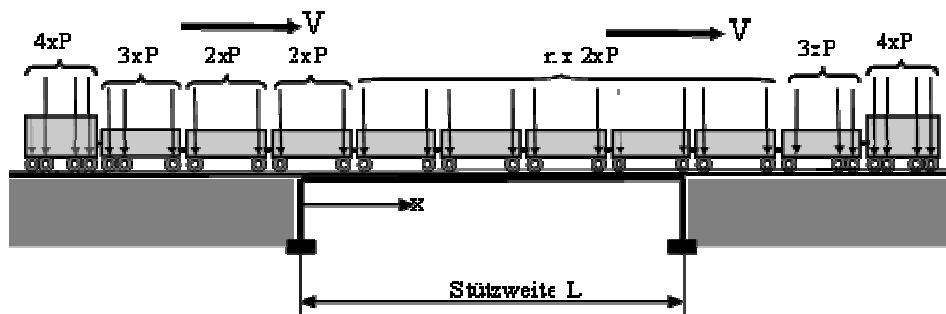


Abbildung 2 Belastungsschema der HSLM-A Züge des EUROCODE

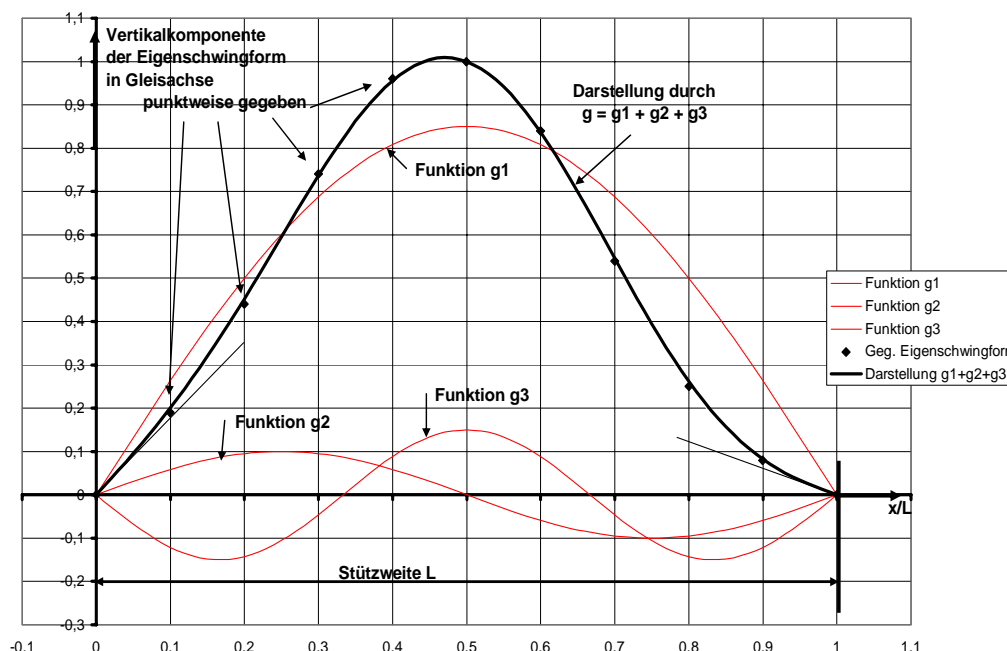
2. Die Gleichung (5) bedeutet, dass das Vektorprodukt aus dem Lastvektor am Gesamtsystem und der Eigenschwingform, die vom betrachteten EMS repräsentiert wird, den Lastwert für den EMS ergibt. Für die sich bewegende Achslast ist dieser Lastwert in jedem Zeitpunkt durch die Vertikalkomponente der Eigenschwingfigur in jenem Punkt, wo sich die Achslast gerade befindet, bestimmt. Diese Vertikalkomponente ist mit der Achslast zu multiplizieren.
3. Für frei aufliegende Einfeldträger mit konstantem Querschnitt ergeben sich die Eigenschwingfiguren für alle Biegeschwingungen als exakte Sinusfunktionen. Daraus folgt, dass der Wert des Vektorproduktes während der Überfahrt der Achslast in seiner zeitlichen Variation eine Sinusfunktion der Zeit sein muss. Der in Abschnitt 2.2 gezeigte Berechnungsablauf für sinusförmigen Zeitverlauf der Belastung kann also hier angewendet werden.
4. Die „Anregfrequenz“  $\bar{\omega}$  in den Gleichungen (13) und (14) ergibt sich aus Spannweite und Fahrgeschwindigkeit – entsprechend der Zeit, die von der Achslast benötigt wird, um die Brücke zu überqueren.

5. Bei komplizierteren Systemen werden die Eigenschwingformen durch Überlagerung von einigen wenigen Sinusfunktionen dargestellt. In der Zeitachse ergibt sich dann ebenfalls eine Überlagerung von mehreren Sinusfunktionen zur Darstellung des Lastwertes. Für jede dieser Funktionen ist der in Gl.(13) und Gl.(14) gezeigte Formelapparat zu durchlaufen.
6. In der Praxis hat es sich gezeigt, dass man die Darstellung der Eigenschwingformen vorteilhaft Feld für Feld vornimmt und dabei zur Darstellung von eventuellen Nachgiebigkeiten in den Auflagerpunkten eine lineare Funktion, die eine Durchbiegung am Anfang des Feldes mit einer Durchbiegung am Ende des Feldes verbindet, ergänzend mit einbezieht. In der Regel genügen 4 Sinusfunktionen (zwei symmetrisch, zwei antimetrisch) und eine lineare Funktion zur Darstellung der Eigenschwingformen mit mehr als ausreichender Genauigkeit.

Damit ergibt sich folgende Vorgangsweise:

Erster Schritt: Eigenschwingfigur in Gleisachse als „ $A \cdot \sin(x \cdot b)$ “ - Funktion

$$\left\{ \begin{array}{l} g_1(x) = A_1 \cdot \sin\left(x \cdot \frac{1}{L} \cdot \pi\right) \\ g_2(x) = A_2 \cdot \sin\left(x \cdot \frac{2}{L} \cdot \pi\right) \\ \cdot \\ g_n(x) = A_n \cdot \sin\left(x \cdot \frac{n}{L} \cdot \pi\right) \end{array} \right\} \rightarrow \{\varphi\}_i = \sum_{i=1,n} g(x)_i \quad (15)$$



**Abbildung 3: Unsymmetrische Eigenschwingfigur (z.B. Mittelfeld eines Durchlaufträgers), dargestellt durch Summe von 3 Sinusfunktionen**

Zweiter Schritt: Last als Zeitfunktion

$$\bar{\omega} = \frac{v \cdot i \cdot \pi}{L \cdot 3,6} \rightarrow f(t) = \sum_i [P \cdot A_i \sin(\bar{\omega}_i \cdot t)], i = 1, 2 \dots n \quad (16)$$

Damit ist die Belastungsfunktion am EMS vollständig als Summe von Sinusfunktionen dargestellt und der Formelapparat gemäß Gl.(13) und Gl.(14) kann angewendet werden. In der Folge ist der gesamte Ablauf der Überfahrt einer Achslast durch eine Summe von Sinusfunktionen geschlossen algebraisch dargestellt. Alle Ergebnisse können durch einfaches Auswerten des oben angegebenen Formelapparates gewonnen werden. Die verschiedenen Summierungsvorgänge, über alle Sinusfunktionen, über alle Eigenfrequenzen, über alle Achslasten eines Zuges sind einfach durchführbar.

Im Vergleich mit der sonst üblichen Vorgangsweise der numerischen Integration mit Hilfe der Zeitschrittrechnung nach Newmark ergeben sich folgende Vorteile:

- Bei Anwendung der Newmark-Methode muss ein Zeitschritt für die numerische Integration gewählt werden. Wenn numerische Ungenauigkeiten und Instabilitäten ausgeschlossen werden sollen, ist dieser Zeitschritt sehr klein (meist nur 1 bis 2 Millisekunden, oft auch darunter). Daraus ergeben sich beträchtliche Rechenzeiten in der Größenordnung von 5 bis 30 Minuten für eine einzelne Zugüberfahrt.
- Bei Anwendung der hier vorgestellten Berechnungsmethode beträgt die Rechenzeit pro Zugüberfahrt bei Verwendung eines handelsüblichen Notebook – Computers ca. 1 bis 5 Sekunden. Weil üblicherweise mindestens 10 Zugskonfigurationen zu untersuchen sind, wobei die Fahrgeschwindigkeit von 120 km/h bis 360 km/h mit Schrittweite maximal 5km/h variiert werden muss, multipliziert sich dieser Vorteil beträchtlich.
- Die Wahl des Zeitschrittes der Newmark Methode erfordert Sachkenntnis und Erfahrung. Ein falsch gewählter Zeitschritt kann zu großen Fehlern führen, die häufig nicht erkannt werden, weil das ungenaue bzw. falsche Ergebnis vordergründig oft „irgendwie plausibel“ erscheint und eine konkrete Überprüfung durch einfache Handrechnung sehr schwierig ist. Die hier vorgestellte Berechnungsmethode vermeidet diese Probleme vollständig.
- Wenn die Newmark Methode im Rahmen einer modalen Analyse verwendet wird, muss der Anwender bestimmen, welche Eigenfrequenzen in die Berechnung einbezogen werden sollen. Dies ist ein ähnlich heikler Vorgang wie die Festlegung des Zeitschrittes. Der hier dargestellte Formelapparat erlaubt es, ein Genauigkeitskriterium zu formulieren, welches eine automatisierte Eigenfrequenzauswahl erlaubt und so die notwendige Genauigkeit garantiert.



## 3.2 Anwendungsbeispiel: Die „Westbahnstrecke“ Wien – Salzburg der österreichischen Bundesbahnen

### 3.2.1 Problemstellung

Die ca. 320 km lange Eisenbahnstrecke von Wien nach Salzburg wird zur Zeit für Fahrgeschwindigkeiten bis zu 250 km/h ausgebaut. Dabei sollen, soweit als möglich, die bestehende Trasse und die bestehenden Kunstbauten weiterhin genutzt werden. Die Strecke muss den Regeln des neuen EUROCODE EN 1991-2 und den Anforderungen der „Specifications of European interoperability“ (TSI) entsprechen. Damit war es notwendig, für die ca. 200 Brücken dieses Streckenabschnittes Untersuchungen durchzuführen, ob diese nicht nur den statischen Anforderungen entsprechen, sondern ob auch die Kriterien und Grenzwerte für das dynamische Verhalten eingehalten werden, ob und wo Verstärkungsmaßnahmen notwendig sind und ob eventuell einzelne Tragwerke ausgewechselt werden müssen. Für diese Untersuchungen stand ein Bearbeitungszeitraum von ca. 1 Jahr zur Verfügung. Der größte Teil dieser Untersuchungen wurde vom Ingenieurbüro KMP, Kirsch, Muchitsch und Partner in Linz durchgeführt.

Obwohl ein großer Teil dieser Brücken kleinere Bauwerke von oft nur wenigen Metern Spannweite sind, war doch für jede einzelne Brücke eine vollständige dynamische Untersuchung vorzunehmen, die im Allgemeinen folgende Arbeitsgänge umfasste:

- Überprüfung der vorhandenen Unterlagen und Zeichnungen für die teilweise mehr als 50 Jahre alten Bauwerke
- Erstbeurteilung – ist eine detaillierte Untersuchung notwendig bzw. sinnvoll? Sind gravierende Mängel oder Probleme bereits vordergründig sichtbar?
- Aufstellen eines geeigneten Strukturmodells und Durchführung einer Vergleichsrechnung zur vorliegenden Statischen Berechnung.
- Dynamische Berechnung. In der Regel wurden Zugüberfahrten gemäß „High Speed Load Model“ - EUROCODE EN 1991-2 - simuliert. Es wurden die Zugkonfigurationen HSLM-A1 bis HSLM-A10 und die 12 Zugtypen laut „Annex D“ verwendet. Dabei wurde die Fahrgeschwindigkeit von 80 km/h bis 300 km/h variiert. (Höchstgeschwindigkeit = 1,2 x „Line speed“ für die HSLMA-Züge und 1,2 x „train speed“ für die Züge laut Annex D). Für jeden der weiter unten angegebenen Grenzwerte wurde der ungünstigste Zug, die maßgebende Geschwindigkeit und der ungünstigste Ergebniswert identifiziert.
- Überprüfung der Grenzwerte. In vielen Fällen kam es zu Überschreitungen der Grenzwerte.
- In allen Fällen, wo es zu Grenzwertüberschreitungen kam, wurden die Grundannahmen des statischen Systems (E-Modul, Systemdämpfung, Auflagerbedingungen, usw.) durch in-Situ-Messungen überprüft.

- In den meisten Fällen ergab sich aus den Messungen ein günstigeres Verhalten des Bauwerkes. Das Strukturmodell wurde dann entsprechend angepasst und die Berechnung wurde wiederholt.
- Abschließende Beurteilung des dynamischen Verhaltens im Hinblick auf eventuell erforderliche Verbesserungsmaßnahmen.

Die Beurteilung des dynamischen Verhaltens war im Hinblick auf nachfolgend aufgelistete Kriterien vorzunehmen:

Vertikale Beschleunigung: Um die Stabilität von Schotterbett und Schienenlage sowie einen kontinuierlichen Kontakt zwischen Rad und Schiene sicher zu stellen, ist die vertikale Beschleunigung beschränkt, die bei den Schwingungen während einer Zugüberfahrt auftreten. Gemäß prEN 1990, Annex A2 ist dieser Grenzwert mit  $0,35\text{ g}$  ( $3,5\text{ m/s}^2$ ) festgelegt.

Verkantung: Um Sicherheit gegen Entgleisen zu gewährleisten, darf die Verkantung im Gleisbereich nicht mehr als  $1,5\text{ mm}$  pro  $3\text{ m}$  Länge als Höhenunterschied zwischen den beiden Gleisen betragen (siehe EN 1990, Annex A2)

Vertikale Endrotation: Die Sicherheit gegen Entgleisen und die Notwendigkeit zur Begrenzung der Spannungen in den Schienen machen eine Begrenzung der Endrotation an beiden Enden der Brücke erforderlich. Der Grenzwert ist unabhängig von der Geschwindigkeit und ist als maximal zulässige Durchbiegung in Feldmitte von  $L / 600$  gegeben. Unter Annahme einer parabolischen Biegelinie ergibt sich daraus eine Grenze von  $0.0067\text{ rad}$  für die Endverdrehung des Tragwerkes.

Durchbiegungen: Der im Rahmen der statischen Berechnung übliche Durchbiegungsnachweis ist auf die Lastmodelle LM 71 und SW/0 bezogen. Die Lasten dieser Lastmodelle sind wesentlich höher als die Achslasten der Züge, die für die dynamische Berechnung herangezogen werden. Daher kann in den meisten Fällen auf eine spezielle Betrachtung der Durchbiegungen im Rahmen der dynamischen Berechnung verzichtet werden.

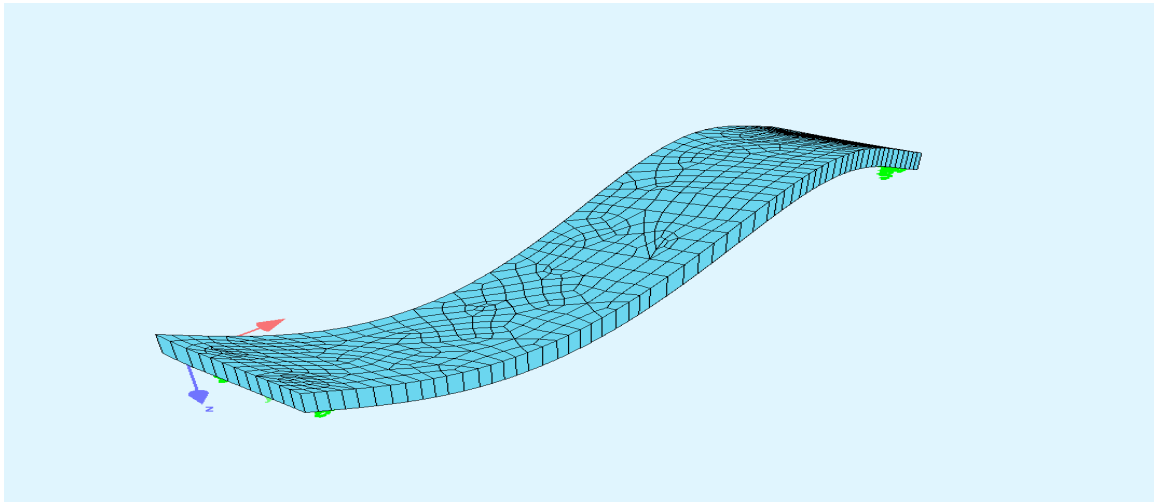
Traglast: Es gilt Ähnliches wie für die Durchbiegungen. In den meisten Fällen genügt es, die Biegemomente der dynamischen Berechnung mit den Werten der vorliegenden Statik zu vergleichen und auf diesem Wege zu verifizieren, dass die dynamische Berechnung für den Nachweis der Tragsicherheit nicht maßgebend wird.

### 3.2.2 Einzelbeispiele:

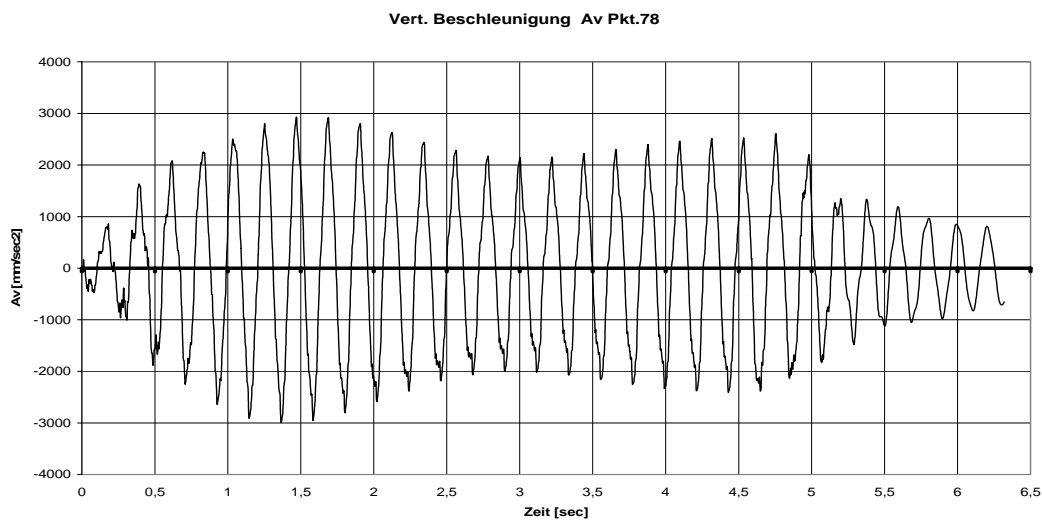
Nachfolgend werden aus den ca. 200 Brücken des Streckenabschnittes Wien – Salzburg 3 typische Beispiele ausgewählt:

#### Vorgespannte Platte

Stützweite 21,5 m, Breite 4,5 m, Plattenstärke 1,15 m

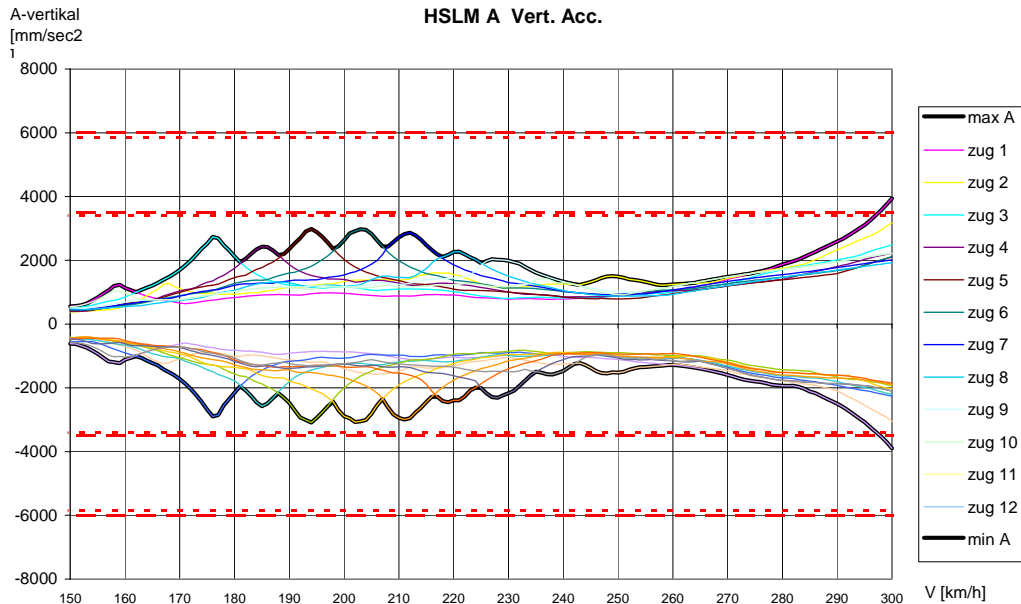


**Abbildung 4: 2. Eigenschwingform bei 18,14 Hz einer vorgespannten Plattenbrücke**



**Abbildung 5: Zeitverlauf der vertikalen Beschleunigung in Plattenmitte während der Überfahrt des Zuges HSLM-A1 mit 295 km/h**

Der Zeitverlauf in Abb. 5 zeigt eine Resonanzwirkung mit Maximum nach 1,6 sec (ca. 1/3 des Zuges hat die Brücke passiert) und ein Ausschwingen nach 4,8 sec, nachdem der ganze Zug die Brücke passiert hat.

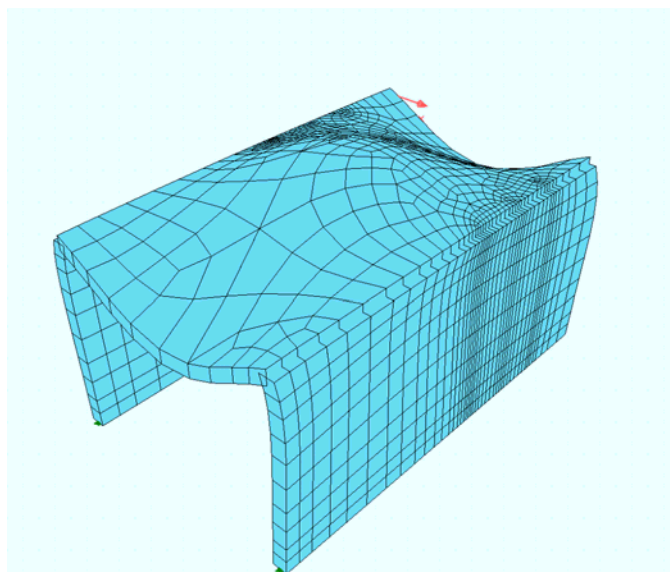


**Abbildung 6: Hüllkurve für die vertikale Beschleunigung. Es werden die Maximal- und die Minimalwerte über alle Punkte der Platte, für alle 10 HSLM-A Züge Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit dargestellt.**

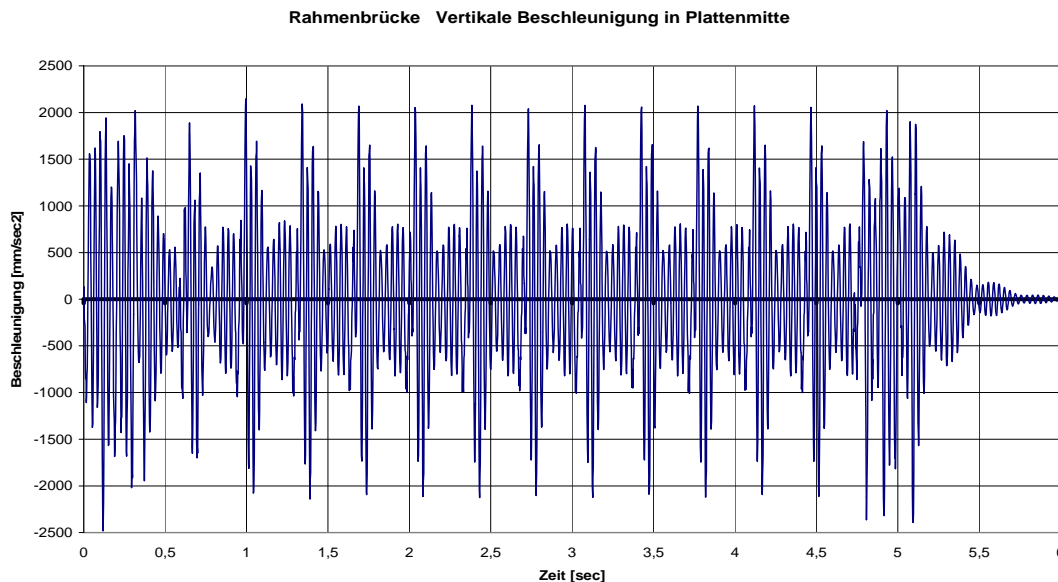
Die Hüllkurven in Abb. 6 zeigen resonanzbedingte Maxima im Geschwindigkeitsbereich zwischen 170 km/h und 240 km/h. Jeder Die HSLM-A Züge haben unterschiedliche Waggonlänge und dem entsprechend ergibt sich die Resonanz mit der Grundfrequenz von 4,90 Hz jeweils bei einer anderen Geschwindigkeit. Am oberen Ende des Diagrammes, bei 300 km/h ergibt sich eine geringfügige Überschreitung des Grenzwertes.

### **Zweigelenk - Rahmenbrücke („Durchlass“)**

Stützweite 5,32 m , Breite 9,00 m, Höhe 4,34 m, Plattenstärke und Dicke der Seitenwände 0,32 m

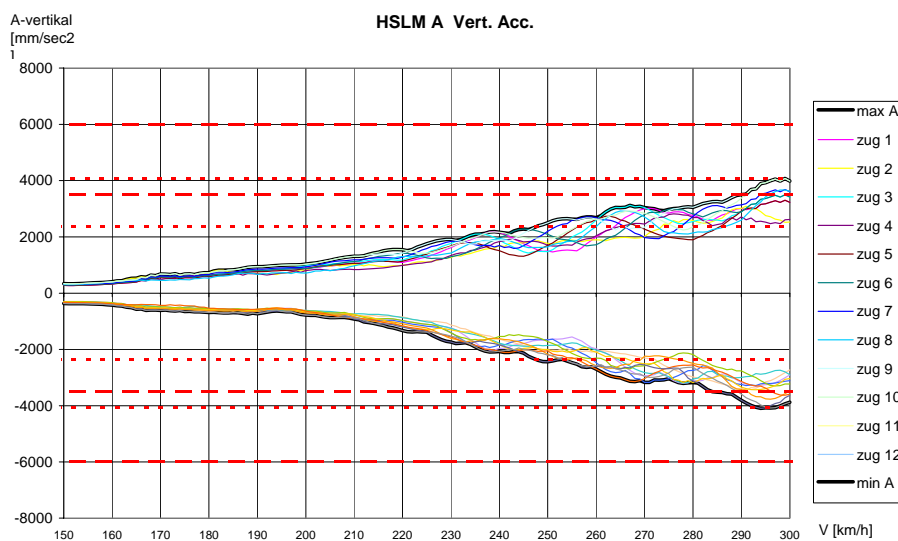


**Abbildung 7: Schwingungsfigur der 4. Eigenfrequenz bei 44,88 Hz**



**Abbildung 8: Zeitverlauf der vertikalen Beschleunigung in Plattenmitte während der Überfahrt des Zuges HSLM-A10 mit 280 km/h**

Der Zeitverlauf in Abb. 8 zeigt keine Resonanzerscheinungen. Jeweils beim Auffahren eines Achspaares auf die Brücke kommt es zu einem Stoß, der auf Grund der relativ hohen Dämpfung (Messungen haben einen Dämpfungskennwert von 8% ergeben) sehr schnell ausschwingt.



**Abbildung 9: Hüllkurve für die vertikale Beschleunigung. Es werden die Maximal- und die Minimalwerte über alle Punkte der Platte, für alle 10 HSLM-A Züge in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit dargestellt.**

Die Hüllkurven in Abb. 9 zeigen ebenfalls keine Resonanzbereiche. Die Auswirkungen der Stossbelastung beim Auffahren eines Achspaares werden mit zunehmender Geschwindigkeit immer größer und überschreiten im oberen Bereich die zulässige Grenze.

## Vorgespannter Vierfeld - Durchlaufträger

Spannweiten 16 – 23 – 23 – 16 m.

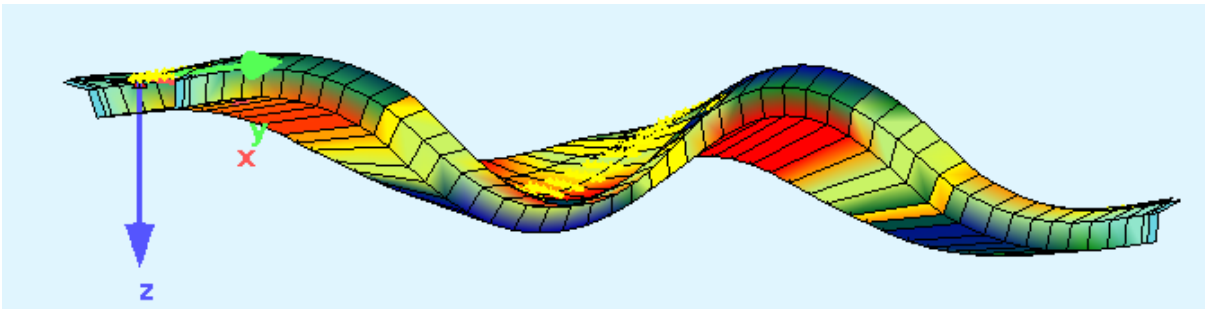


Abbildung 10: Eigenschwingfigur der niedrigsten Eigenfrequenz bei 7,32 Hz

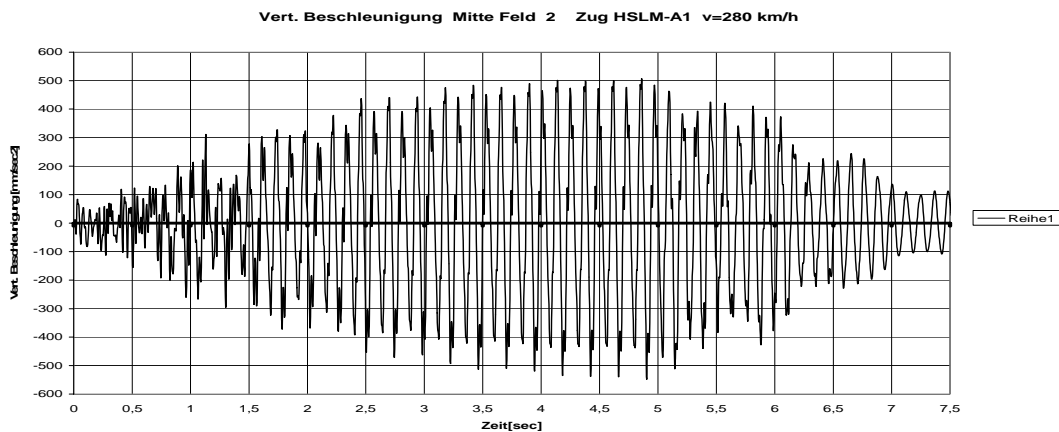


Abbildung 11: Zeitverlauf der vertikalen Beschleunigung in Mitte Feld 2 während der Überfahrt des Zuges HSLM-A1 mit 280 km/h

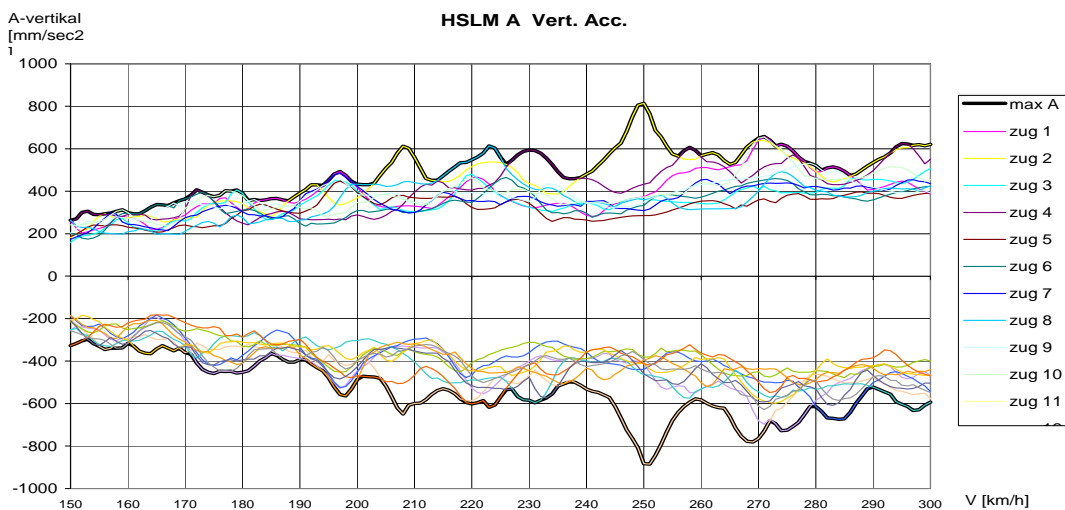


Abbildung 12: Hüllkurve für die vertikale Beschleunigung. Es werden die Maximal- und die Minimalwerte über alle Punkte des Trägers, für alle 10 HSLM-A Züge in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit dargestellt.

### 3.2.3 Zusammenfassung der wichtigsten Ergebnisse

Insgesamt wurden für die 200 Brücken der Westbahn ca. 20000 Zugüberfahrten simuliert. Mit den anfangs verfügbaren Berechnungsmöglichkeiten (1/4 Stunde für eine Überfahrt) wäre das ein aussichtsloses Unternehmen geblieben. Der Berechnungsumfang im beschriebenen Umfang wurde nur dadurch möglich, dass die alternative Berechnungsmethode rechtzeitig verfügbar wurde. Aus den nun vorliegenden Untersuchungen ergeben sich weiterführende Erfahrungen, die nachfolgend in kurzer Übersicht zusammengestellt werden:

An ca. 35% der untersuchten Brücken wurden Messungen durchgeführt. Dabei ergaben sich große Unterschiede (bis zu 1:1,7 !) zwischen den vorausgerechneten und den gemessenen Eigenfrequenzen. Daraus folgt, dass die wirklich vorhandene Steifigkeit signifikant höher ist, als die Steifigkeit, die sich aus den üblichen Berechnungsannahmen ergibt. Im gegebenen Rahmen war es nicht möglich, zu diesem Problem fundierte wissenschaftliche Untersuchungen anzustellen.

Trotzdem können einige Gründe für diese – zunächst überraschende Erfahrung genannt werden:

- Die Materialkennwerte (vor allem der E-Modul), die wir für die Statik üblicherweise verwenden, sind Mindestwerte, die von der Baufirma nicht unterschritten werden sollten. Die wirklichen Werte sind systematisch höher.
- Die Nachgiebigkeit von Baugrund und Fundamenten: Die in der statischen Berechnung hierfür eingesetzten Kennwerte sind in der Regel vorsichtige Werte auf der „sicheren Seite“ und gelten für Dauerlasten. Die realen Werte für die Kurzzeitbeanspruchung durch die Schwingungen während einer Zugüberfahrt sind systematisch höher.
- Kleine Brücken sind oft im umgebenden Boden eingebettet. In der Statik rechnet man auf der „sicheren Seite“ ohne unterstützende Wechselwirkung mit dem umgebenden Boden.
- Verschiedene Komponenten der Brücke, wie z.B. Schotterbett, Schwellen, Schienen, Randbalken usw. werden als „ständige Last“ betrachtet. Aus verschiedenen Nebeneffekten können sich aber zusätzliche Steifigkeiten ergeben, die üblicherweise vernachlässigt werden.

Auf jeden Fall müssen wir aus diesen Erfahrungen lernen, dass Eigenfrequenzen, auf Basis der in der Statik üblichen Annahmen vorausgerechnet, meist systematisch von den wirklichen Werten abweichen werden. Diese Ungenauigkeiten sind bei kleinen Bauwerken aus Beton wesentlich größer als bei längeren Stützweiten und Stahlkonstruktionen.

Bei ca. 35% der Brücken ergaben sich bei der Erstberechnung bedenkliche Überschreitungen der gegebenen Grenzwerte. Nach Messung der Eigenfrequenz und Kalibrierung der Eingabewerte blieben am Ende nur wenige Brücken übrig, wo größere Verstärkungsmaßnahmen oder auch eine Auswechslung des Tragwerks erforderlich ist.

Die erste Eigenfrequenz ist leicht durch Messungen zu bestimmen. Alle anderen Messungen (z.B. der Dämpfungskennwerte) sind wesentlich aufwendiger. Daher hat sich die Vorgangsweise, das Strukturmodell über die gemessene erste Eigenfrequenz zu eichen, als vorteilhaft herausgestellt.

Es ist offensichtlich, dass die beschriebenen Untersuchungen vor allem bei kleinen Bauwerken zu aufwendig und zu teuer sind, wenn man die Kosten dieser Untersuchungen mit den Baukosten und den üblichen Honoraren für die Planung solcher Brücken vergleicht. Dieses Problem ist der Hintergrund für die Entwicklung einer einfach zu handhabenden Berechnungsmethode. Darüber hinaus wurden zwei Forschungsprojekte initiiert, die Normung, Standardisierung und damit Vereinfachung der Messmethoden sowie vereinfachende Richtlinien für die Berechnung und die Entwicklung von Regelplanungen zum Ziel haben. Beide Forschungsprojekte werden bis Mitte 2008 abgeschlossen sein.

### 3.3 Anwendungsbeispiel: Bogenbrücke über das Ilmtal

Die Ilmtalbrücke bei Ilmenau, im Zuge der Neubaustrecke Ebenfeld – Erfurt, ist derzeit in Planung (K+S Ingenieur-Consult, Nürnberg, als Ausführungsplaner der Firma A. Hörnig im Auftrag der DB ProjektBau GmbH). Nachdem die Planungsarbeiten noch nicht abgeschlossen sind, ist es nicht möglich, im gegebenen Zusammenhang detaillierte Informationen zum Projekt zu veröffentlichen. Es wird nur insoweit auf diese Brücke Bezug genommen, als die dynamische Berechnung für dieses Projekt zeigt, dass die hier vorgestellte Berechnungsmethode auch für die Berechnung von größeren Eisenbahnbrücken mit Vorteil angewendet werden kann.

Das statische System ist in Abb. 13 dargestellt. Die Bogenspannweite beträgt 175 m, der Bogenstich 37,4 m. Die Stützweiten links des Bogens sind mit  $2 \times 61$  m und rechts des Bogens mit  $3 \times 58$  m festgelegt. Der Brückenträger ist ein vorgespannter Hohlkasten ( $h=5$ m) und soll mit Hilfe des Taktschiebeprozesses hergestellt werden.

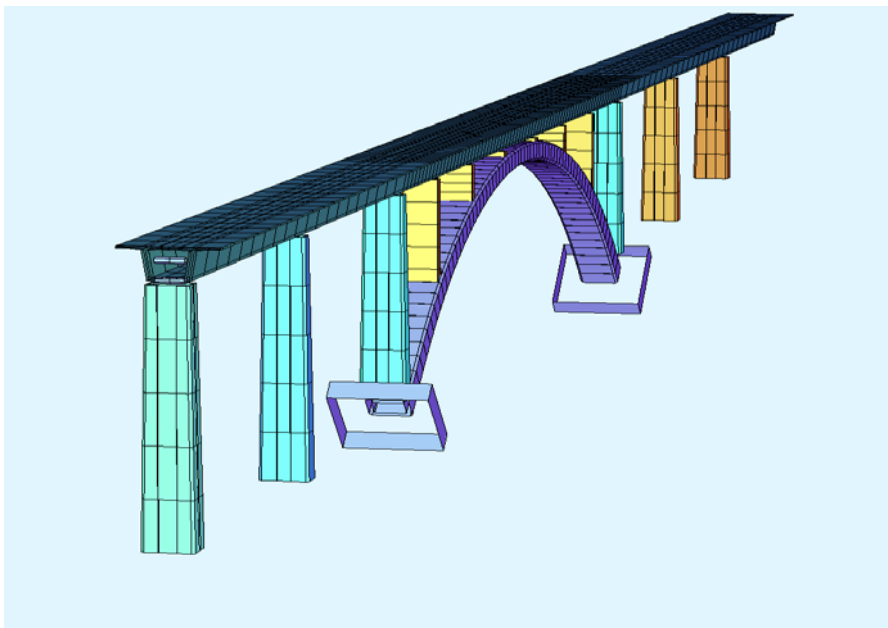
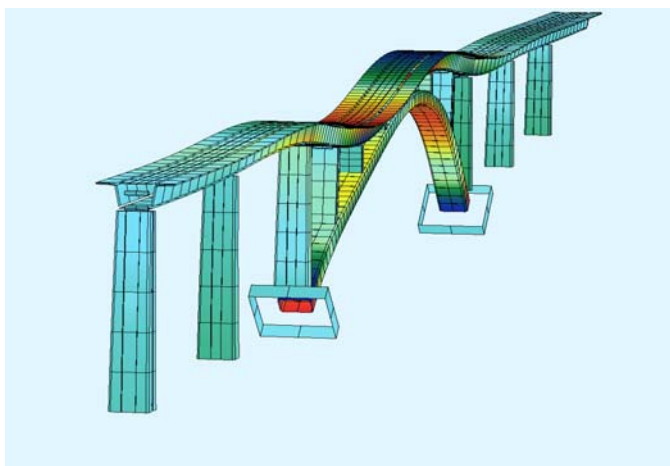


Abbildung 13: Statisches System der Ilmtalbrücke, Bogen Nord

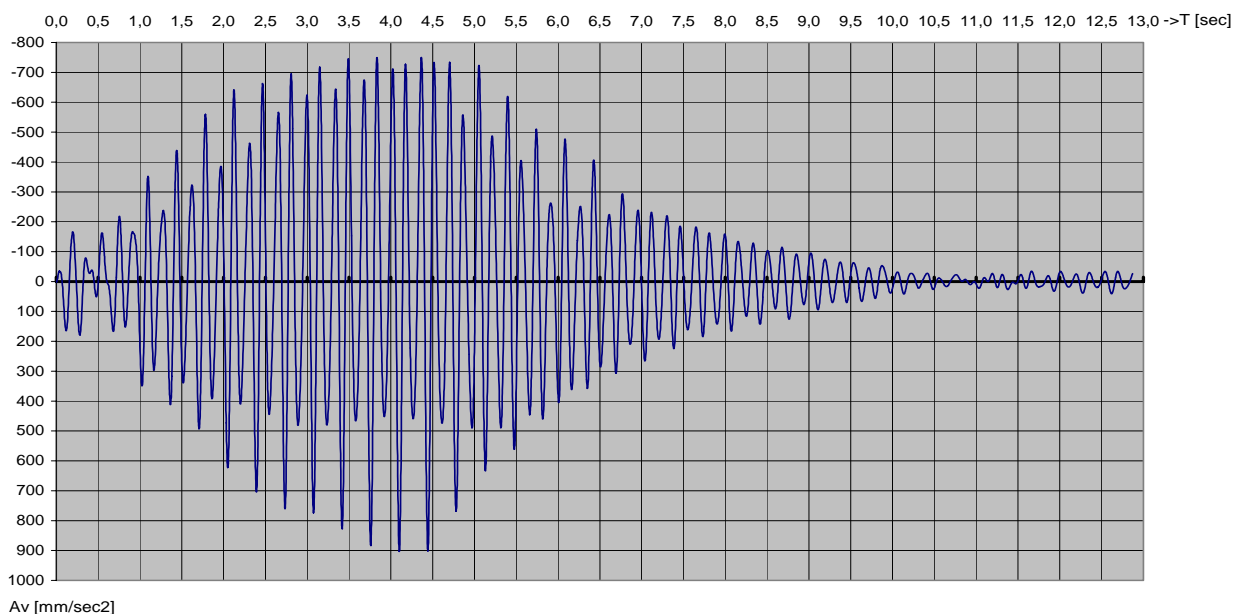


Die dynamische Berechnung umfasst die Simulation der von EUROCODE und RIL 804 der DB vorgeschriebenen Zugüberfahrten (Lastenzüge HSLMA-1 bis HSLM-A10). Die Fahrgeschwindigkeit wird von 120 km/h bis 360 km/h mit einer Schrittweite von 5 km/h variiert. Es waren also 490 Zugüberfahrten zu berechnen. Nachdem eine sehr umfangreiche Auswertung der Rechenergebnisse erforderlich war, Beschleunigungen, Verformungen und Schnittkräfte für das gesamte Tragwerk, betrug die Rechenzeit ca. 1 Minute pro Zugüberfahrt. Damit war es möglich, die dynamische Berechnung mit im Rahmen des Gesamtprojektes vertretbarem Zeit- und Kostenaufwand abzuwickeln.

Nachfolgend werden einige Ergebnisgrafiken gezeigt:



**Abb. 14: Schwingungsfigur der ersten Eigenfrequenz mit Biegung in der Bogenebene bei 0,87 Hz**



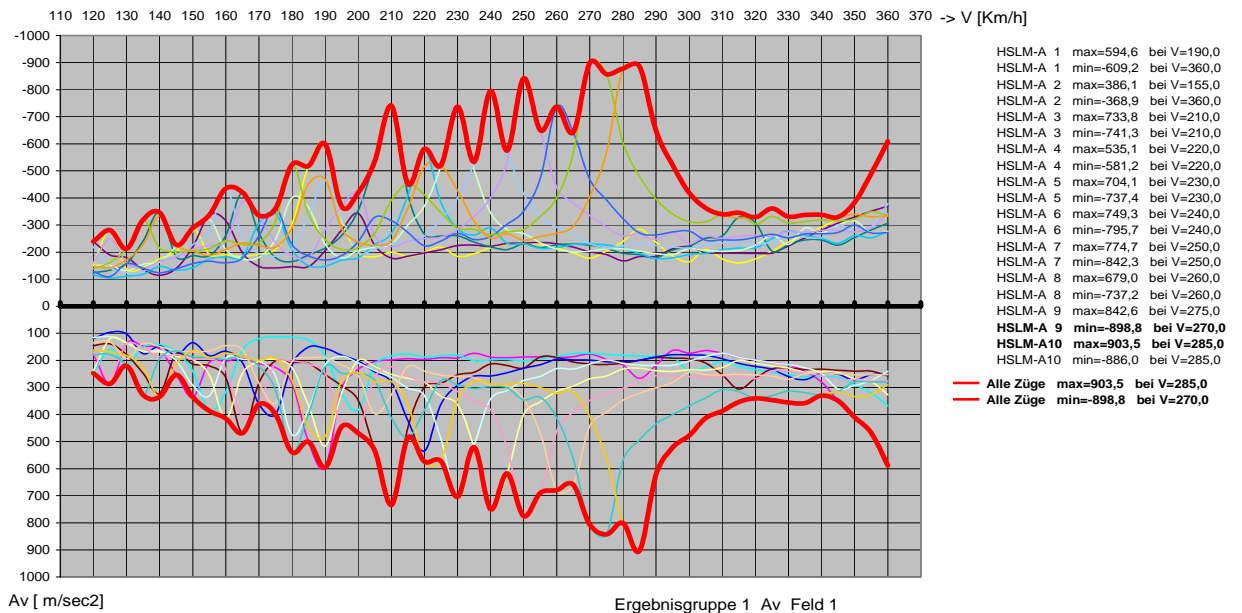
Av [mm/sec<sup>2</sup>]

**Zeitdiagramm für Überfahrt**

Ergebnis Nr. 3 Av code 3 3008 gen.10 Ergebnisgruppe 1

Zug: HSLM-A10 V= 285,0 km/h

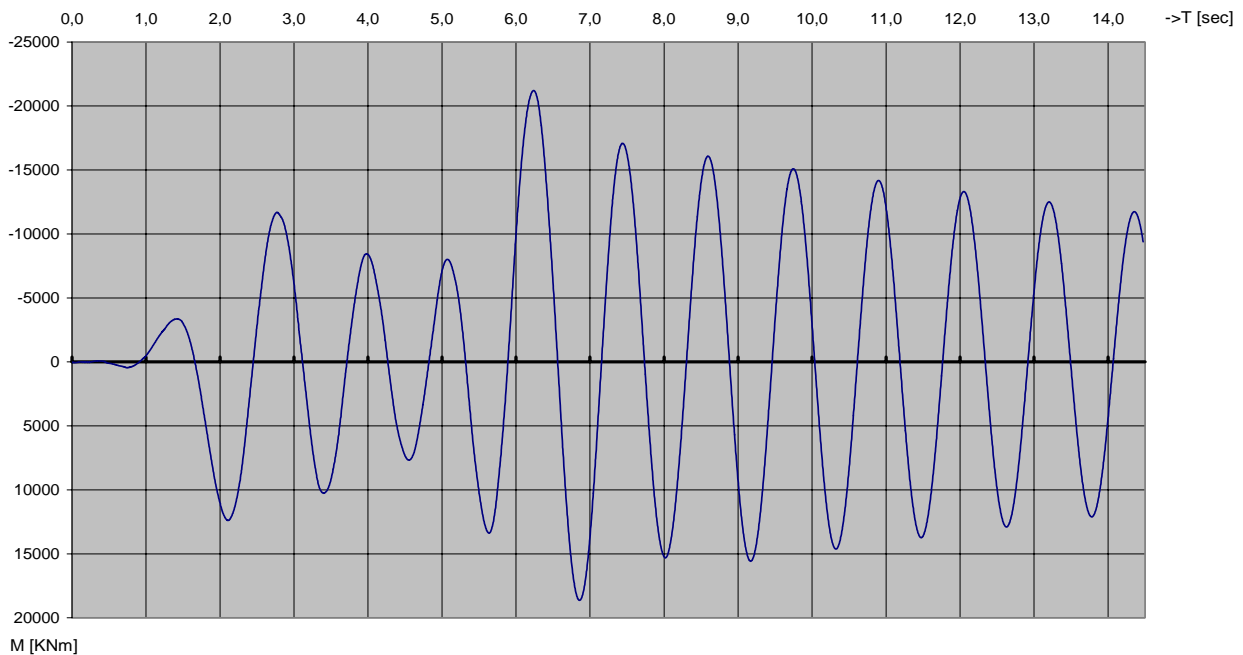
**Abbildung 15 Zeitdiagramm für die vertikale Beschleunigung in Mitte Feld 1 links des Bogens bei Überfahrt des Zuges HSLM-A10 mit 285 km/h**



**Imtalbrücke, Bogen Nord V4 Hüllkurven**

Züge HSLM-A 1 (1) bis HSLM-A10 (10) V von 120,0 bis 360,0 km/h

**Abb. 16:** Hüllkurven für die vertikale Beschleunigung im Feld 1 links des Bogens. Maximalwerte für die Züge HSLM-A1 – HSLM-A10 in Abhängigkeit von der Fahrgeschwindigkeit



**Zeitdiagramm für Überfahrt**

Zug: HSLM-A 9 V= 360,0 km/h

**Abbildung 17:** Zeitdiagramm für das Biegemoment im Bogen beim rechten Kämpfer während der Überfahrt des Zuges HSLM-A9 mit 360 km/h

## 4 ERDBEBENBERECHNUNG

### 4.1 Anmerkungen zur Problemstellung

Die Regelungen des EUROCODE bringen eine geänderte Betrachtungsweise im Vergleich zur bisherigen Praxis, einen Prozentsatz des Eigengewichtes als statisch wirkende Horizontalkraft anzusetzen. In den neuen Berechnungsregeln, die im Wesentlichen auf die Anwendung der Antwortspektrum Methode hinauslaufen, wird jetzt das tatsächliche dynamische Verhalten der Brückenbauwerke berücksichtigt. Bisherige Erfahrungen mit den neuen Berechnungsmethoden weisen darauf hin, dass sich in der Folge größere Beanspruchungen der Pfeiler und der Lager ergeben. Die Beanspruchungen der Brückenträger bleiben dagegen meist im Rahmen der bisher gewohnten Größenordnungen. Bei den Brückenpfeilern wird die Frage des Eintretens von Zustand II und des Überschreitens der Traglast häufiger als früher zu einem kritischen Punkt und die Lagerkonstruktionen sind für größere Kräfte und Verschiebungen, sowohl in Längs- als auch in Querrichtung auszulegen.

Diese Änderung der Betrachtungsweise ist nicht nur bei Neuplanungen relevant, sondern auch bei der Begutachtung bestehender Bauwerke, etwa im Zusammenhang mit Sanierungsmassnahmen oder Umbauten. In Österreich werden derzeit mehrere Autobahnbrücken verbreitert und bei dieser Gelegenheit „generalsaniert“. Die Brücken sollen nach einem solchen Umbau den Regeln des jetzt gültigen EUROCODE entsprechen. Es ergeben sich dabei in mehreren Fällen Probleme, weil Pfeiler und Lager, nach den alten Normen ausreichend bemessen, der neuen Norm nicht mehr entsprechen.

Der EUROCODE betrachtet modale Analyse und das darauf aufbauende Antwortspektrum - Verfahren als die angemessene Vorgangsweise bei der Erdbebenberechnung. In Österreich hat man im nationalen Anwendungsdokument zusätzlich zwei vereinfachte Berechnungsmethoden vorgeschlagen:

- Das „vereinfachte“ Antwortspektrum – Verfahren
- Das „Push-over“ – Verfahren

Beide Methoden setzen voraus, dass das dynamische Verhalten des Systems im Rahmen der modalen Analyse durch nur eine einzige Eigenfrequenz bzw. Eigenschwingfigur beschrieben werden kann. Im „vereinfachten“ Verfahren sind Näherungsformeln zur Abschätzung der Eigenfrequenz und für die nachfolgenden Berechnungsgänge angegeben, so dass auch eine „Handrechnung“ mit gewissen Einschränkungen möglich ist. Das „Push-over“ Verfahren reduziert die Grundidee der modalen Analyse ebenfalls auf nur einen einzigen EMS, ergänzt diese Vorgangsweise aber durch einen Rechenablauf, der eine vereinfachende Berücksichtigung der variablen Steifigkeit eines unter Horizontalbeanspruchung plastifizierenden („Zustand II“) Brückenpfeilers erlaubt.

Für Erdbebenberechnungen an komplexeren Systemen wird man immer wieder auf eine vollständige Simulation des zeitlichen Ablaufes („Time history“) auf Basis einer vorgegebenen Accelerogrammes zurückgreifen müssen. Am Markt verfügbare Software beruht im Allgemeinen auf den Prinzipien der numerischen Zeitintegration und des Newmark – Verfahrens. Es sind wieder die gleichen Anmerkungen zu machen, wie im Fall der Dynamik von Eisenbahnbrücken (Rechenzeit, Speicherplatzbedarf, Erfahrung und Sachkenntnis beim Benutzer erforderlich). Daher lag es nahe, das hier vorgestellte alternative Berechnungsverfahren auch für die Erdbebenberechnung zu adaptieren.

#### 4.2 Erdbebenberechnung als „Time History“ - Berechnung mit Analytischer Zeitintegration

Die Daten zur Beschreibung der Bodenbeschleunigung während eines Erdbebenereignisses sind üblicher weise in einem Zeitraster mit konstanter Maschenweite von 0.01, 0.02 oder auch bis zu 0.05 Sekunden gegeben. Der Verlauf zwischen den für diese Rasterpunkte gegebenen Werten wird üblicherweise linear angenommen. Gleichung (17) ergibt die zeitabhängige Last am Gesamtsystem:

$$\{F\}_{(t)} = [M] \cdot \{a_b\}_{(t)} \quad (17)$$

$\{F\}_{(t)}$ .....Lastvektor am Gesamtsystem

$[M]$ .....Massematrix des Gesamtsystems

$\{a_b\}_{(t)}$ ..... zeitabhängige Basisbeschleunigung

Gleichung (18) steht in Analogie zu Gleichung (5) und ergibt die entsprechende Last am EMS:

$$f_{i(t)} = \{\varphi\}_i \cdot [M] \cdot \{a_b\}_{(t)} \quad (18)$$

$f_{i(t)}$ .....zeitabhängige Last am EMS der Eigenfrequenz  $i$

$(\varphi)_i$ .....Eigenschwingfigur der Eigenfrequenz  $i$

Nachdem der Zeitverlauf der Basisbeschleunigung zwischen zwei Rasterpunkten linear angenommen wird, ergibt sich auch für die Last am EMS ein linearer Verlauf. Der Formelapparat, der in Abschnitt 2.2.1 angegeben wurde kann also unmittelbar zur Berechnung des EMS – Verhaltens im Zeitabschnitt zwischen 2 Rasterpunkten verwendet werden. Jeder Abschnitt im Zeitraster ist also als eine „Belastungsphase“ im Sinne von Abschn. 2.2.1 zu behandeln, das anschließende Ausschwingen ist mit den Berechnungsergebnissen des Folgezeitschrittes zu überlagern.

Im Vergleich zum Newmark –Verfahren ergeben sich folgende Vorteile:

- Der hier gezeigte Berechnungsablauf nach Gleichung (8) und (9) ist wesentlich einfacher als die Berechnung eines Newmark - Zeitschrittes.
- Die Erfordernisse bezüglich numerischer Stabilität und Genauigkeit erfordern bei Verwendung des Newmark – Verfahrens in den meisten Fällen einen wesentlich engeren Zeitraster. Der für die Aufzeichnung der Basisbeschleunigung verwendete Zeitraster muss

fast immer noch weiter unterteilt werden. Im Gegensatz dazu kann man bei Verwendung der analytischen Zeitintegration ohne Problem mehrere Zeitmaschen für die Berechnung zusammenfassen.

- Der einfache Aufbau von Gl. (8) und (9) erlaubt in gewissen Grenzen auch eine „Handrechnung“, z.B. für Plausibilitätskontrollen. Auch eine vollständige Berechnung im Rahmen eines Excel – Arbeitsblattes ist möglich.

#### 4.3 Erweiterung für nichtlineare Problemstellungen

Eine Erweiterung der hier gezeigten Berechnungsmethode für nichtlineare Problemstellungen ist unter folgenden Voraussetzungen möglich:

- Wenn nichtlineare Effekte auf einzelne Strukturteile beschränkt sind.
- Wenn der nichtlineare Zusammenhang „einfach“ darstellbar ist.

Diese beiden Voraussetzungen sind im Fall von nichtlinearen Erdbebenberechnungen sehr oft erfüllt. Die häufigsten nichtlinearen Problemstellungen sind:

- Berücksichtigung der aufgerissenen Zugzone an der Einspannstelle von Brückenpfeilern
- Einbau von Dämpferelementen mit nichtlinearer Dämpfercharakteristik.

In diesen Fällen sind die Gleichungen (8) und (9) vordergründig nicht mehr verwendbar, weil die modale Analyse lineares Verhalten voraussetzt. Die nachfolgend beschriebene Vorgangsweise führt trotzdem zum Ziel:

1. Berechnung der Eigenfrequenzen und der Kennwerte der EMS an einem modifizierten System. Es werden die Steifigkeiten überall dort, wo nichtlineare Effekte zu erwarten sind, reduziert oder auch vollständig eliminiert (z.B. Gelenke an der Einspannstelle von Stützen, Dämpferelemente werden zunächst weggelassen, usw.)
2. Die vorhin beschriebene Berechnung wird für die EMS des modifizierten Systems durchlaufen. Am Ende des Zeitintervalls werden die nichtlinearen Bedingungen überprüft. An der Einspannstelle von Stützen wird mit der vorläufig bestimmten Verdrehung das zugehörige Moment aus einer bekannten Momenten – Krümmungsbeziehung interpoliert oder die Differenz der Schwingungsgeschwindigkeit an den beiden Systempunkten, die durch ein Dämpferelement verbunden sind, ergibt die zugehörige Dämpferkraft aus der Dämpfercharakteristik.
3. Die fehlenden Kräfte werden als zusätzliche Last im Zeitintervall aufgebracht. Der Vorgang gemäß Punkt 2 ist für das aktuelle Zeitintervall gegebenenfalls zu wiederholen. Im Allgemeinen wird nach zwei bis drei Iterationszyklen Konvergenz erreicht.

#### 4.4 Beispiel: Vorgespannte 6 - Feldbrücke

Stützweiten: 33 / 4 x 42 / 33 m      Querschnitt: Hohlkasten, 3,5 m hoch.

Stützhöhen: 16 / 20,8 / 27 / 28,7 / 22,8 m

Lagerung: An den Widerlagern horizontal frei verschieblich.

Horizontalkräfte (längs und quer) werden von den Stützen aufgenommen.

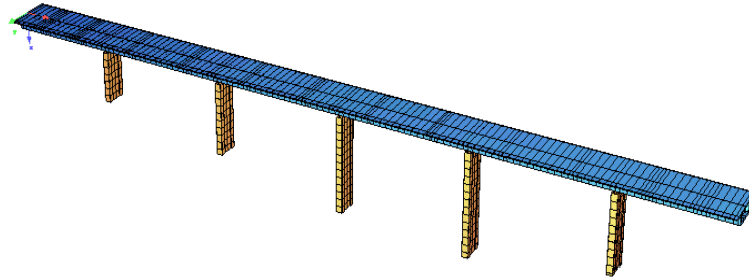


Abbildung 18: Stat.System einer vorgespannten 6-Feld Brücke.

#### Problemstellung:

Kann ein Dämpferelement am Endwiderlager die Längsverschiebung im Erdbebenfall so weit begrenzen, dass eine Auflagerung durch Neoprenlager möglich ist?

Belastungsangabe Lastfall „Erdbeben“:

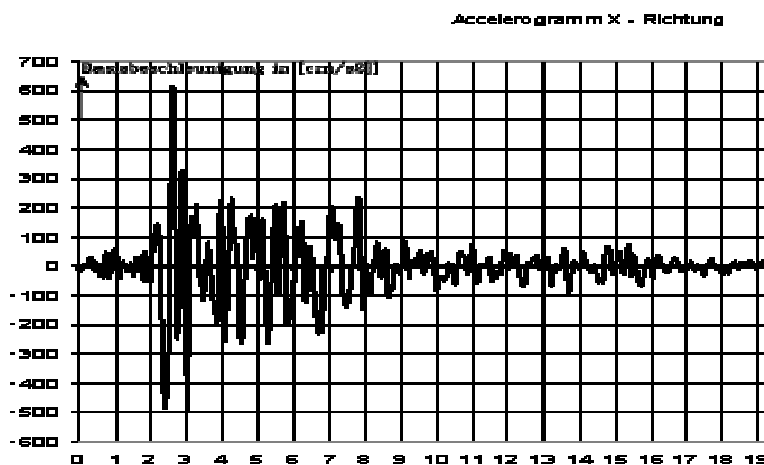


Abbildung 19: Accelerogramm Bodenbeschleunigung (Längsrichtung)  
„Santa Cruz Mtns. Earthquake“ vom 17. Okt. 1989 , 17:04

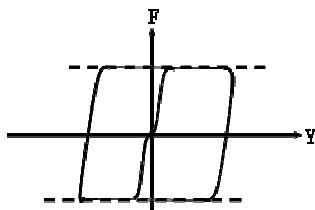


Abbildung 20: Charakteristik des  
Dämpferelementes

$$F_D = C \cdot v^\alpha \quad c = 200, \alpha = 0,1$$

v ... Geschw. Differenz zw. Anfg. u. Ende des  
Dämpferelementes

Ergebnis der Berechnung:

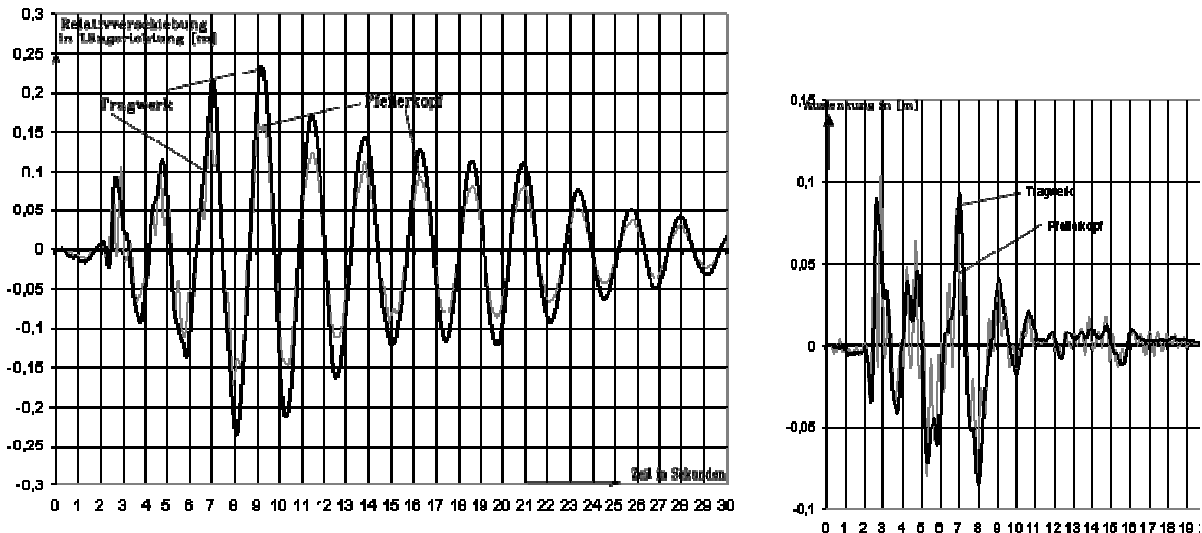


Abbildung 21: Längsverschiebung des Tragwerkes und des Pfeilerkopfes (Mittelpfeiler)

links: ohne Dämpfer

rechts: mit Dämpfer

Die Ergebnisse zeigen, dass die Absolutverschiebungen des Tragwerkes durch das Dämpferelement von 23 cm auf 9 cm und am Pfeilerkopf des Mittelpfeilers von 15 cm auf 6 cm reduziert werden. Die Relativverschiebungen zwischen Tragwerk und Pfeilerkopf werden aber nur geringfügig von 7,5 cm auf 5 cm verkleinert. Der Grund für dieses überraschende Ergebnis liegt darin, dass die Massenkräfte des Tragwerkes größtenteils von den kürzeren Pfeilern Nr. 1 und Nr. 5 aufgenommen werden und dass die lokale Eigenfrequenz des Mittelpfeilers in der Nähe der Eigenfrequenz des Gesamtsystems liegt. Die vorgeschlagene Anordnung des Dämpfers kann daher das Lager am Mittelpfeiler nur beschränkt entlasten.

## 5 LITERATUR

- [1] EUROCODE EN 1990, Annex 2
- [2] EUROCODE EN 1991-2
- [3] Technical specification for interoperability relating to the infrastructure subsystem of the Trans-European high-speed rail system
- [4] EUROCODE 8 – Auslegung von Bauwerken gegen Erdbeben Teil 2: Brücken
- [5] Clough Ray, Penzien Joseph, „Dynamics of Structures“  
CSI Computers and Structures Inc. 1995.
- [6] Pircher Heinz, “Analytische Zeitintegration und Modale Analyse”, Dissertation an der Techn Universität Graz, Mai 2006.
- [7] Burgmann Karl, “Berechnung der Erdbebeneinwirkung auf Brücken nach EC8“, Diplomarbeit an der Techn. Universität Graz, November 2007
- [8] Pircher Heinz, Stadler Christian, „Dynamic Investigations at Austrian Westbahn“,  
Report IABSE SYMPOSIUM Budapest 2006.