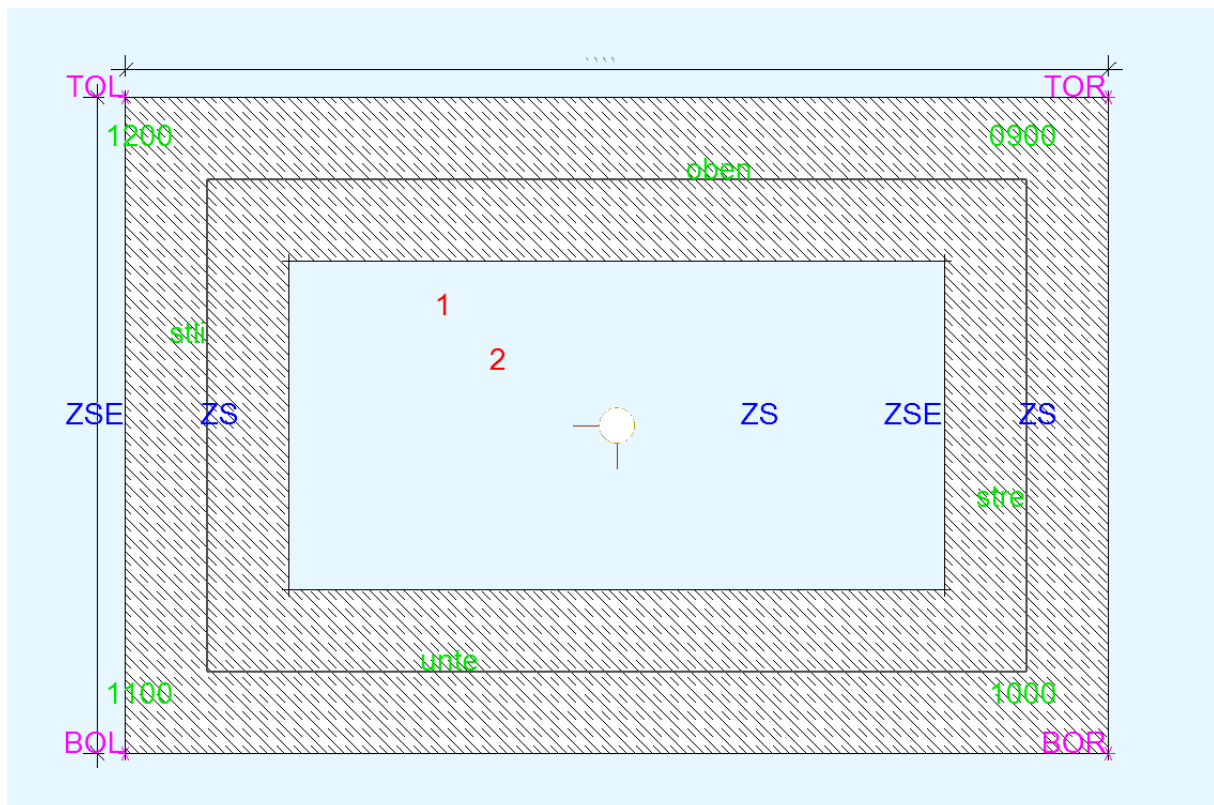


Normenbeispiel

Nachweis Torsion

Gemäß DIN 1045-1 (06/2008)



Inhaltsverzeichnis

1	Beschreibung	2
2	System + Belastung	2
2.1	Querschnitte	2
2.2	Bemessungsschnittgrößen:.....	3
3	Nachweis Torsion.....	4
3.1	Nachweis Schub + Torsion mit $\cot \Theta = 1.0$	4
3.1.1	Ergebnisse der Bemessung mit AQB	4
3.1.2	Handrechnung	5
3.1.3	CADINP Eingabe	6
3.2	Nachweis Schub + Torsion mit $\cot \Theta$ variiert.....	7
3.2.1	Ergebnisse der Bemessung mit AQB	7
3.2.2	Handrechnung	8
3.2.3	CADINP Eingabe	9

1 Beschreibung

Nachfolgendes Beispiel behandelt den Nachweis für Torsion und Querkraft gemäß DIN 1045-1, Kapitel 10.4 (Ausgabe 06/2008). Am Beispiel eines einfachen Hohlkastens werden die Nachweise durchgeführt.

2 System + Belastung

2.1 Querschnitte

Es werden drei unterschiedliche Querschnitte untersucht:

Querschnitt 1: Hohlkasten (Geometrie siehe Abbildung 1)
 Beton: C 35/45
 Bewehrungsstahl: BSt 500 S
 Bewehrung Rang 1-4 für Biegung
 Rang 5 als Z-Rang nur für Torsion
 (siehe Abbildung 1)
 Vorgabe minimaler Hebelarm $z = 1.70 \text{ m} = \text{Abstand Bewehrung Rang 5}$

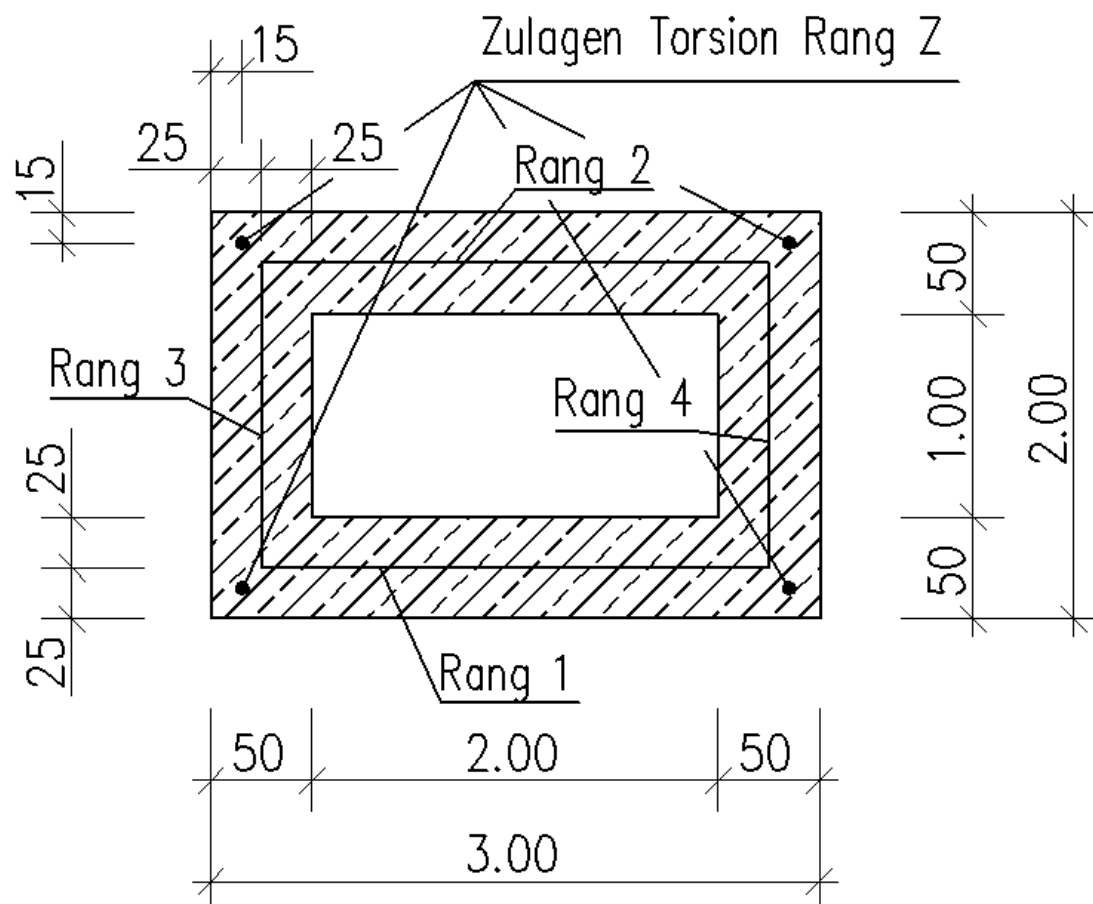


Abbildung 1: Querschnitte

Querschnittswerte

Mat	A[m2]	Ay/Az/Ayz	Iy/Iz/Iyz	ys/zs	y/z-smp	E/G-Modul	gam
MBw	It[m4]	[m2]	[m4]	[cm]	[cm]	[MPa]	[kN/m]
1	4.0000E+00		1.833E+00	0.00	0.00	29878	100.00
2	4.089E+00		3.833E+00	0.00	0.00	12449	

Ergänzende Querschnittswerte

alfa-T	ymin	zmin	hymin	AK	MB	Tau-T	Tau-Vy
[1/°K]	[cm]	[cm]	[cm]	[m2]		Tau-B	Tau-Vz
						[1/m3]	[1/m2]
1.0E-05	-150.00	-100.00		4.590E+00	2	2.179E-01	
	150.00	100.00	170.00	4.000E+00			6.818E-01

Wölbquerschnittswerte

Wmin[m2]	Wmax[m2]	CM[m6]	CMS[m4]	ASwyy[m6]	ASwzz[m6]	ry[cm]	rz[cm]
-0.5069	0.5068	0.000	0.000	0.000	0.000	0.00	0.00

Bemessungs-Querschnittswerte

Mat	A[m2]	Ay/Az/Ayz	Iy/Iz/Iyz	ys/zs	E/G-Modul	gam
MBw	It[m4]	[m2]	[m4]	[cm]	[MPa]	[kN/m]
1	4.0000E+00		1.833E+00	0.00	22983	100.00
	4.089E+00		3.833E+00	0.00	9576	

Konstruktionsdaten

M	Umfang-A/-I	deff	t-min	t-max	KTZ	thet-p	thet-y	thet-z	thet-yz
	[m2/m]	[m2/m]	[cm]	[cm]	[o/o]	[tm2/m]	[tm2/m]	[tm2/m]	[tm2/m]
	10.000	6.000			0.0	14.167	4.583	9.583	

Bewehrungsabstufung

Rang	mQ	mB	Sum-As	von-As	bis-As	yr	zr	L-Tors	N-v	M-v
			[cm2]	[cm2]	[cm2]	[cm]	[cm]	[cm]	[kN]	[kNm]
M1	1	2	52.35	52.35	52.35	0.00	75.00			
M2	1	2	52.35	52.35	52.35	0.00	-75.00			
M3	1	2	31.41	31.41	31.41	125.00	0.00			
M4	1	2	31.41	31.41	31.41	-125.00	0.00			
Z5	1	2	4.00	0.00		0.00	0.00	880.00		

Tabelle 1: Querschnittswerte

2.2 Bemessungsschnittgrößen:

Querkraft $V_z = 2000,00kN$

Torsionsmoment $M_T = 500,00kNm$

Biegemoment $M_y = 6800,00kNm$



Die Eingabe erfolgt ausschließlich auf numerischer Basis mit der CADINP Eingabesprache im TEDDY.

Die Entscheidung für den Nachweis im Zustand I oder II erfolgt über die Eingabe von Bewehrungsrängen in der Querschnittsdefinition. Sobald eine Bewehrung vorhanden ist, wird der Nachweis im Zustand II durchgeführt.

3 Nachweis Torsion



Der Nachweis der Torsion erfolgt in 2 Schritten. Zuerst wird im Rahmen der Bemessung für Normalkraft und Biegung eine Torsionslängsbewehrung ermittelt. Diese wird immer mit einer Druckstrebenneigung Θ von 45° durchgeführt. Im 2. Schritt erfolgt dann die Schubbemessung für Querkraft und Torsion. Hier wird der Neigungswinkel Θ gemäß Gl. 73 ermittelt.

3.1 Nachweis Schub + Torsion mit $\cot Q = 1.0$

Zum Vergleich der erforderlichen Torsionslängsbewehrung aus der Biege- und Schubbemessung wird die Neigung bei der Schubbemessung zuerst festgeschrieben.

3.1.1 Ergebnisse der Bemessung mit AQB

Ergebnisse der Biegebemessung:

Rechenwerte der Schnittgrößen								
Stab	x[m]	N[kN]	Vz[kN]	Mt[kNm]	My[kNm]	Mz[kNm]	Mb[kNm ²]	
2	0.000	0.0	2000.00	500.00	6800.00			
MNr.	Anz. Temp	Material-sicherheit [-]	max.Druck -spannung [MPa]	bei Dehnung [o/oo]	max.Zug -spannung [MPa]	bei Dehnung [o/oo]	tension-stiffening [MPa]	
1	0	1.500	-19.83	-2.00	0.00	0.00		
2	0	1.150	-456.52	-25.00	456.52	25.00		
Erforderliche Bewehrung								
Stab	x[m]	NQ	LF	Ni [kN]	Myi/Mzi [kNm]	e1/yn / e2/zn [mm]	nue rel C/S tra	As R [cm ²]
1	0.000	1	0	0.2	6939.10	-2.31 / 25.00	1.50 / 1.02	52.35 / 1
					0.00	-9999 / -843	1.15	52.35 / 2
					e=	0.35 / -0.94	=> 1.70	31.41 / 3
								31.41 / 4
								11.02 T
				Material	1	-2.31 / 27.21	-19.83 / 0.00	min / max
				Bewehrung	2	-0.09 / 25.00	276.87 / 455.12	min / max
				Schnitt ZS	T/Tmax	0.736	(D 0.000, Z 0.736)	3719.4 [kN]

Ergebnisse der Schubbemessung:

Schubsicherheitsnachweise

=====

Bemessung Schub DIN 1045-1 (2001)

Minimaler Schubdeckungsgrad / tan der Neigung der Streben 1.00 / 1.00

MNr	f-cd [MPa]	tau-rd [MPa]	sigIIQ [MPa]	sigIIT [MPa]	sigIIQ+ [MPa]	fyd [MPa]
1	19.83	0.10	14.88	10.41	14.88	
2						434.78

Toleranz für Überschreitung maximaler Schub- oder Hauptdruckspannungen 0.0200

Erforderliche Schubbewehrung														
Stab	x[m]	NQ	LF	S	Z	Tv	z	bs	K	tau-V	tau-T	sigII	cot	As-v
						[kN/m]	[m]	[m]	[-]	[MPa]				[cm ² /m]
1	0.000	1	0	ZS		588.24	86%I	0.500	1.33	1.18	-0.11	-2.14	1.00	12.28
						Vrd,ct					429.18	Ve/Vr	2.33	
						(d 1.850 rho,l 1.221 sig 0.00)								
						Vrd,c					666.51			
						Vrd,max					6321.88	Ve/Vr	0.16	
						Vrd,sy					1000.00	Ve/Vr	1.00	
						Trdl,c (teff= 0.250)					-23896.69	Te/Tr	0.02	
												V+T	0.03	
						Trd2,s					-500.00	Te/Tr	1.00	
				ZS		588.24	86%I	0.500	1.33	1.18	0.11	-2.57	1.00	14.78
						Vrd,ct					429.18	Ve/Vr	2.33	
						(d 1.850 rho,l 1.221 sig 0.00)								
						Vrd,c					666.51			
						Vrd,max					6321.88	Ve/Vr	0.16	
						Vrd,sy					1000.00	Ve/Vr	1.00	
						Trdl,c (teff= 0.250)					23896.69	Te/Tr	0.02	
												V+T	0.03	
						Trd2,s					500.00	Te/Tr	1.00	
						As-l (T)					1.25	[cm ² /m]		
						As-l (T)					11.02	[cm ²]		

3.1.2 Handrechnung

Schubfluss infolge Querkraft und Torsion:

$$T_V = \frac{V}{z} = \frac{0.5 \cdot 2000 \text{ kN}}{1.70 \text{ m}} = 588,24 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

$$T_T = \frac{M_t}{2 \cdot A_k} = \frac{500 \text{ kNm}}{2 \cdot 4,59 \text{ m}^2} = 54,47 \frac{\text{kN}}{\text{m}}$$

Torsionslängsbewehrung alleine aus der Biegebemessung mit $\cot \Theta = 1.0$

$$a_{s,l-T} = \frac{T_T}{f_{yd} \cdot \tan \Theta} = \frac{54,47}{\frac{50}{1,15}} \cdot 1,0 = 1,25 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}}$$

Aufsummiert über den Umfang des Ersatzhohlkastens ergibt sich

$$A_{s,l-T} = 1,25 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \cdot 2 \cdot (2,0 - 2 \cdot 0,15 + 3,0 - 2 \cdot 0,15) \text{ m} = 1,25 \cdot 8,80 = 11 \text{ cm}^2$$

Querkrafttragfähigkeit mit rechnerisch erforderlicher Querkraftbewehrung (Gl. 74)

$$V_{Rd,c} = c_j \cdot 0,48 \cdot h \cdot f_{ck}^{1/3} \cdot \left(1 + 1,2 \cdot \frac{s_{cd}}{f_{cd}} \right) \cdot b_w \cdot z =$$

$$= 0,5 \cdot 0,48 \cdot 1,0 \cdot 35^{1/3} \cdot \left(1 + 1,2 \cdot \frac{0,0}{f_{cd}} \right) \cdot 0,5 \cdot 1,70 \cdot 10^3 = 667,3 \text{ kN}$$

maximale Neigung der Druckstrebe

$$\cot \Theta = 1.0 \rightarrow \text{Vorgabe}$$

maximale Querkrafttragfähigkeit (Gl. 76)

$$V_{RD,max} = \frac{b_w \cdot z \cdot a_c \cdot f_{cd}}{\cot \Theta + \tan \Theta} = \frac{0,50 \cdot 1,70 \cdot 0,75 \cdot \frac{0,85 \cdot 35}{1,5}}{1,00 + \frac{1}{1,00}} \cdot 10^3 = 6321,88 \text{ kN}$$

$$a_c = 0,75 \cdot h_1 = 0,75 \cdot 1,0 = 0,75$$


Maximal aufnehmbares Torsionsmoment (Gl. 93)

$$T_{RD,max} = \frac{a_{c,red} \cdot f_{cd} \cdot 2 \cdot A_k \cdot t_{eff}}{\cot \Theta + \tan \Theta} = \frac{(0,7 \cdot 0,75 \cdot 1,0) \cdot (0,85 \cdot \frac{35}{1,5}) \cdot 2 \cdot 4,59 \cdot (2 \cdot 0,25)}{1,0 + \frac{1}{1,0}} \cdot 10^3 = 23.896,7 \text{ kNm}$$

$$a_{c,red} = 0,7 \cdot 0,75 \cdot h_1 = 0,7 \cdot 0,75 \cdot 1,0$$

Bemessungswert der Schubbewehrung – Querkraft + Torsion

$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \frac{T_V \pm T_T}{f_{yd} \cdot \cot \Theta} = \frac{588,24 \pm 54,47}{\frac{50}{1,15} \cdot 1,0} = \begin{cases} 14,78 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \\ 12,28 \frac{\text{cm}^2}{\text{m}} \end{cases}$$

Vergleich AQB Ergebnis mit Handrechnung		
	PROG AQB	Handrechnung
	$a_{sw} = 12,28 / 14,78 \text{ cm}^2/\text{m}$	$a_{sw} = 12,28 / 14,78 \text{ cm}^2/\text{m}$

3.1.3 CADINP Eingabe

```
+PROG AQB urs:2 $ Bemessung GZT - Stäbe
KOPF 1. Bruchbemessung Stäbe
echo voll extr
sto#mt 500      $ Variable für Torsionsmoment Mt [kNm]
sto#my 6800    $ Variable für Biegemoment My [kNm]
sto#vz 2000    $ Variable für Querkraft Vz [kN]
S NQ 1 NR 1 X 0.0 MT #mt MY #my VZ #vz $ Bemessung Stab 1 an der Stelle x=0.0 m mit vorgegebenen Schnittgrößen
BEW MOD QUER BMOD EINZ LFB 1          $ Nummer der Bewehrungsverteilung
BEME ZUS BRUC TANA 1 TANB 1          $ Grenzwerte Neigungswinkel Fachwerkstrebe vordefiniert
ende
```

Vorgabe TANA 1 TANB 1:
 Unterer und oberer Grenzwert für die Neigung des
 Fachwerks der Schub-Bemessung ($\tan \Theta = 1/\cot \Theta$)
 Hier ist $\Theta=45^\circ$

3.2 Nachweis Schub + Torsion mit cot Q variiert

3.2.1 Ergebnisse der Bemessung mit AQB

Ergebnisse der Biegebemessung:

Rechenwerte der Schnittgrößen

Stab	x[m]	N[kN]	Vz[kN]	Mt[kNm]	My[kNm]
2	0.000	0.0	2000.00	500.00	6800.00

MNr.	Anz. Temp	Material-sicherheit [-]	max.Druck -spannung [MPa]	bei Dehnung [o/oo]	max.Zug -spannung [MPa]	bei Dehnung [o/oo]	tension-stiffening [MPa]
1	0	1.500	-19.83	-2.00	0.00	0.00	
2	0	1.150	-456.52	-25.00	456.52	25.00	

Erforderliche Bewehrung

Stab	x[m]	NQ	LF	Ni [kN]	Myi/Mzi [kNm]	e1/yn [o/oo]	e2/zn [mm]	nue C/S	rel tra	As R [cm2]
2	0.000	1	0	0.2	6939.10	-2.31	25.00	1.50	1.02	52.35 1
					0.00	-9999	-843	1.15		52.35 2
					e=	0.35	-0.94	=>	1.70	31.41 3
										31.41 4
										11.02 T
				Material	1	-2.31	-19.83	min		
						27.21	0.00	max		
				Bewehrung	2	-0.09	276.87	min		
						25.00	455.12	max		
				Schnitt ZS	T/Tmax	0.736	(D 0.000,Z 0.736)			3719.4 [kN]

Ergebnisse der Schubbemessung:

Schubsicherheitsnachweise

=====

Bemessung Schub DIN 1045-1 (2001)

Minimaler Schubdeckungsgrad / tan der Neigung der Streben 0.33 / 1.72

MNr	f-cd [MPa]	tau-rd [MPa]	sigIIQ [MPa]	sigIIIT [MPa]	sigIIQ+ [MPa]	fyd [MPa]
1	19.83	0.10	14.88	10.41	14.88	
2						434.78

Toleranz für Überschreitung maximaler Schub- oder Hauptdruckspannungen 0.0200

Erforderliche Schubbewehrung

Stab	x[m]	NQ	LF	S Z	Tv	z	bs	K	tau-V	tau-T	sigII	cot	As-v
2	0.000	1	0	ZS	588.24	86%I	0.500	1.33	1.18	-0.11	-3.56	3.00	4.09
					Vrd,ct					429.18	Ve/Vr	2.33	
					(d 1.850 rho,1 1.221 sig 0.00)								
					Vrd,c					666.51			
					Vrd,max					3793.12	Ve/Vr	0.26	
					Vrd,sy					1000.00	Ve/Vr	1.00	
					Trd1,c (teff= 0.250)					-14338.01	Te/Tr	0.03	
											V+T	0.07	
					Trd2,s					-500.00	Te/Tr	1.00	
				ZS	588.24	86%I	0.500	1.33	1.18	0.11	-4.28	3.00	4.93
					Vrd,ct					429.18	Ve/Vr	2.33	
					(d 1.850 rho,1 1.221 sig 0.00)								
					Vrd,c					666.51			
					Vrd,max					3793.12	Ve/Vr	0.26	
					Vrd,sy					1000.00	Ve/Vr	1.00	
					Trd1,c (teff= 0.250)					14338.01	Te/Tr	0.03	
											V+T	0.07	
					Trd2,s					500.00	Te/Tr	1.00	
										As-1(T)	3.76	[cm2/m]	
										As-1(T)	33.07	[cm2]	

3.2.2 Handrechnung

Schubfluss und Torsionslängsbewehrung aus Biegebemessung siehe Kapitel 3.1.2

Bei der Ermittlung der Querkrafttragfähigkeit mit rechnerisch erforderlicher Querkraftbewehrung (Gl. 74) wird b_w durch t_{eff} ersetzt.

$$\begin{aligned}
 V_{Rd,c} &= c_j \cdot 0,48 \cdot h \cdot f_{ck}^{1/3} \cdot \left(1 + 1,2 \cdot \frac{s_{cd}}{f_{cd}} \right) \cdot b_w \cdot z = \\
 &= 0,5 \cdot 0,48 \cdot 1,0 \cdot 35^{1/3} \cdot \left(1 + 1,2 \cdot \frac{0,0}{f_{cd}} \right) \cdot 0,3 \cdot 1,70 \cdot 10^{-3} = 400,38 kN
 \end{aligned}$$

Die kombinierte Schubkraft aus Querkraft und Torsion wird nach Gl. 90 berechnet und in Gl. 73 eingesetzt.

$$\begin{aligned}
 V_{ED,T+V} &= \pm V_{ED,T} + \frac{V_{ED} \cdot t_{eff}}{b_w} = \pm \frac{T_{ED} \cdot z}{2 \cdot A_k} + \frac{V_{ED} \cdot t_{eff}}{b_w} = \pm \frac{500 \cdot 1,70}{2 \cdot 4,59} + \frac{0,5 \cdot 2000 \cdot 0,25}{0,5} = \\
 &= \pm 92,593 + 500 = \begin{cases} 592,593 kN \\ 407,407 kN \end{cases}
 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die maximale Neigung der Druckstrebe (Gl 73) zu

$$0,58 \leq \cot \Theta \leq \frac{1,2 - 1,4 \cdot s_{cd} / f_{cd}}{1 - V_{Rd,c} / V_{Ed}} \leq 3,0$$

$$\text{Fall 1: } \cot \Theta = \frac{1,2 - 0,0}{1 - 400,38 / 407,407} = 67,6 > 3,0 \rightarrow \cot \Theta = 3,00$$

$$\text{Fall 2: } \cot \Theta = \frac{1,2 - 0,0}{1 - 400,38 / 592,593} = 3,70 > 3,0 \rightarrow \cot \Theta = 3,00$$

Die maximale Querkrafttragfähigkeit (Gl. 76) berechnet sich zu:

$$\text{Fall 1: } V_{Rd,max} = \frac{b_w \cdot z \cdot a_c \cdot f_{cd}}{\cot \Theta + \tan \Theta} = \frac{0,50 \cdot 1,70 \cdot 0,75 \cdot \frac{0,85 \cdot 35}{1,5}}{3,00 + \frac{1}{3,00}} \cdot 10^3 = 3.793,12 kN$$

$$\text{Fall 2: } V_{Rd,max} = \frac{b_w \cdot z \cdot a_c \cdot f_{cd}}{\cot \Theta + \tan \Theta} = \frac{0,50 \cdot 1,70 \cdot 0,75 \cdot \frac{0,85 \cdot 35}{1,5}}{3,00 + \frac{1}{3,00}} \cdot 10^3 = 3.793,12 kN$$

Die maximal aufnehmbaren Torsionsmomente (Gl. 93) berechnen sich zu:

Fall1:

$$T_{RD,max} = \frac{a_{c,red} \cdot f_{cd} \cdot 2 \cdot A_k \cdot t_{eff}}{\cot \Theta + \tan \Theta} = \frac{(0.7 \cdot 0.75 \cdot 1.0) \cdot (0.85 \cdot \frac{35}{1.5}) \cdot 2 \cdot 4.59 \cdot (2 \cdot 0.25)}{3.0 + \frac{1}{3.0}} \cdot 10^3 = 14.388,0 kNm$$

Fall2:

$$T_{RD,max} = \frac{a_{c,red} \cdot f_{cd} \cdot 2 \cdot A_k \cdot t_{eff}}{\cot \Theta + \tan \Theta} = \frac{(0.7 \cdot 0.75 \cdot 1.0) \cdot (0.85 \cdot \frac{35}{1.5}) \cdot 2 \cdot 4.59 \cdot (2 \cdot 0.25)}{3.0 + \frac{1}{3.0}} \cdot 10^3 = 14.388,0 kNm$$

Damit ergeben sich für die Schubbewehrung – Querkraft + Torsion – folgende Werte:


$$a_{sw} = \frac{A_{sw}}{s_w} = \begin{cases} \frac{T_V - T_T}{f_{yd} \cdot \cot \Theta} = \frac{588.24 - 54.47}{\frac{50}{1.15} \cdot 3.0} = 4,09 \frac{cm^2}{m} \\ \frac{T_V + T_T}{f_{yd} \cdot \cot \Theta} = \frac{588.24 + 54.47}{\frac{50}{1.15} \cdot 3.0} = 4,93 \frac{cm^2}{m} \end{cases}$$

Torsionslängsbewehrung mit $\cot \Theta = 3.0$ aus der Schubbemessung

$$a_{s,l-T} = \frac{T_T}{f_{yd} \cdot \tan \Theta} = \frac{T_T}{f_{yd}} \cdot \cot \Theta = \frac{54.47}{\frac{50}{1.15}} \cdot 3.0 = 3,76 \frac{cm^2}{m}$$

Aufsummiert über den Umfang des Ersatzhohlkastens ergibt sich

$$A_{s,l-T} = 3,76 \frac{cm^2}{m} \cdot 2 \cdot (2,0 - 2 \cdot 0,15 + 3,0 - 2 \cdot 0,15)m = 3,76 \cdot 8,80 = 33,07 cm^2$$

Vergleich AQB Ergebnis mit Handrechnung		
	PROG AQB	Handrechnung
	$a_{sw} = 4,09 / 4,93 \text{ cm}^2/m$	$a_{sw} = 4,09 / 4,93 \text{ cm}^2/m$

3.2.3 CADINP Eingabe

```
+PROG AQB urs:3 $ Bemessung GZT - Stäbe
KOPF 2. Bruchbemessung Stäbe
echo voll extr
S NQ 1 NR 2 X 0.0 MT #mt MY #my VZ #vz $ Bemessung Stab 1 an der Stelle x=0.0 m mit vorgegebenen Schnittgrößen
BEW MOD QUER BMOD EINZ LFB 1 $ Nummer der Bewehrungsverteilung
BEME ZUS BRUC $ Grenzwerte Neigungswinkel Fachwerkstrebe gemäß Programm
ENDE
```